Un corrigé du devoir surveillé n°4 – Sujet B

EXERCICE 4.1 (10,5 points). 1. Déterminer la mesure principale d'un angle dont une mesure est :

(a) $\frac{7\pi}{6}$:

$\frac{7\pi}{6} \notin]-\pi;\pi]$ donc ce n'est pas la mesure principale, cependant nous sommes proches de cet intervalle et en enlevant 2π nous obtenons celle-ci :
$\frac{7\pi}{6} \equiv \frac{7\pi}{6} - 2\pi \pmod{2\pi} \equiv \frac{7\pi}{6} - \frac{12\pi}{6} \pmod{2\pi} \equiv -\frac{5\pi}{6} \pmod{2\pi}$
Comme $-\frac{5\pi}{6} \in]-\pi;\pi]$ c'est la mesure principale de $\frac{7\pi}{6}$.

(b) $\frac{43\pi}{4}$:

$\frac{43\pi}{4} \notin]-\pi;\pi]$ donc ce n'est pas la mesure principale ; regardons combien de fois $2\pi = \frac{8\pi}{4}$ nous pouvons enlever et combien il restera en effectuant la division euclidienne de 43 par 8 :

$$\begin{array}{rrcl} & 43 & = & 5\times 8+3 \\ \Leftrightarrow & \frac{43\pi}{4} & = & 5\times\frac{8\pi}{4}+\frac{3\pi}{4} = 5\times 2\pi + \frac{3\pi}{4} \equiv \frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi} \end{array}$$

Comme $\frac{3\pi}{4} \in]-\pi;\pi]$ c'est la mesure principale de $\frac{43\pi}{4}$

(c) $\frac{82\pi}{3}$:

$\frac{82\pi}{3} \notin]-\pi;\pi]$ donc ce n'est pas la mesure principale ; regardons combien de fois $2\pi = \frac{6\pi}{3}$ nous pouvons enlever et combien il restera en effectuant la division euclidienne de 82 par 6 :

$$\begin{array}{rrcl} & 82 & = & 13\times 6+4 \\ \Leftrightarrow & \frac{82\pi}{3} & = & 13\times\frac{6\pi}{3}+\frac{4\pi}{3} = 13\times 2\pi + \frac{4\pi}{3} \\ & & \equiv & \frac{4\pi}{3} \pmod{2\pi} \notin]-\pi;\pi] \\ & & \equiv & \frac{4\pi}{3} - 2\pi \pmod{2\pi} \equiv \frac{4\pi}{3} - \frac{6\pi}{3} \pmod{2\pi} \\ & & \equiv & -\frac{2\pi}{3} \pmod{2\pi} \in]-\pi;\pi] \end{array}$$

La mesure principale de $\frac{82\pi}{3}$ est donc $-\frac{2\pi}{3}$.

2. Simplifier les expressions suivantes :

(a) $A = \cos(\pi - x) + \cos(-x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi + x)$

$$\begin{array}{rcccccc} A & = & \cos(\pi-x) & +\cos(-x) & +\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) & +\cos(\pi+x) \\ & = & -\cos(x) & +\cos(x) & +\cos(x) & -\cos(x) \\ & = & 0 & & & \end{array}$$

(b) $B = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin(-x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$$\begin{array}{rccccc} B & = & \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) & +\sin(-x) & +\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \\ & = & \cos(x) & -\sin(x) & +\sin(x) \\ & = & \cos(x) & & \end{array}$$

3. Calculer :

(a) $C = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)$

$$\begin{array}{rcccccc} C & = & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) & +\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) & -\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) & +\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) \\ & = & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) & +\frac{\sqrt{3}}{2} \\ & = & \sqrt{3} & & & \end{array}$$

(b) $D=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

$$\begin{array}{rcllll} D & = & \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) & +\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) & +\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) \\ & = & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ & = & -\sqrt{3} & & & \end{array}$$

EXERCICE 4.2 (3 points)**.**
La fonction f est définie pour tout réel x par $f : x \longmapsto 2x^2 - x + 1$.

1. Déterminer si f est dérivable en 2 et, si oui, donner son nombre dérivé en 2.

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{2(2+h)^2-(2+h)+1-7}{h} = \frac{2(4+4h+h^2)-2-h+1-7}{h}$$
$$= \frac{8+8h+2h^2-2-h+1-7}{h} = \frac{7h+2h^2}{h} = \frac{h(7+2h)}{h}$$
$$= 7+2h \text{ quand } h \neq 0$$

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 7+2h = 7$ donc f est dérivable en 2 et $f'(2)=7$.

2. Donner une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2.

Pour obtenir l'équation réduite on peut, entre autre, utiliser la formule :
$y = f'(2)(x-2)+f(2) = 7(x-2)+7 = 7x-7$

EXERCICE 4.3 (6,5 points)**.**
La suite (u_n) est telle que, pour tout entier naturel n, $u_n = n^2+3$.

1. Déterminer u_0, u_1, u_2 et u_3.

$u_0 = 0^2+3 = 3$, $u_1 = 1^2+3 = 4$, $u_2 = 2^2+3 = 7$ et $u_3 = 3^2+3 = 12$.

2. On donne l'algorithme suivant, écrit en « langage courant » :

Entrée
  s
Initialisation
  $u \leftarrow 3$
  $n \leftarrow 0$
Traitement
  Tant que $u < s$
    $n \leftarrow n+1$
    $u \leftarrow n^2+3$
  Fin tant que
Sortie
  n

(a) Le faire tourner « à la main » si s vaut 8 en indiquant vos résultats successifs dans le tableau ci-dessous et indiquer le résultat qu'il renvoie :

n	u	A-t-on $u < s$?
0	3	Oui
1	4	Oui
2	7	Oui
3	12	Non

L'algorithme renvoie 3

(b) Que fait cet algorithme dans le cas général ?

Cet algorithme calcule et affiche jusqu'à quel n il faut aller pour que u_n soit supérieur à s.

(c) En donner une traduction sous la forme d'une fonction écrite en Python.

```
def seuil(s) :
    u = 3
    n = 0
    while u < s :
        n = n + 1
        u = n**2 + 3
    return n
```