Chapitre 3

Nombre dérivé

Sommaire

3.1 Activités

ACTIVITÉ 3.1 (Vitesse moyenne, vitesse instantanée)**.**
Un corps en chute libre, avec une certaine vitesse initiale, a son altitude donnée au bout de t secondes par la fonction h (en mètres) définie, pour un temps t supérieur à 0, par :

$$h : t \longmapsto -4,9t^2 + 20t + 15$$

1. (a) Quelle est son altitude au départ de sa trajectoire ?
   (b) Au bout de combien de temps touche-t-il le sol ? *On appellera ce temps t_0 pour la suite.*
2. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction h sur l'intervalle $[0\,;\,t_0]$.
3. (a) Quelle est la variation de l'altitude entre l'instant $t = 0$ et l'instant $t = 1$?
   (b) Quelle est alors sa vitesse moyenne à laquelle cette altitude varie sur cet intervalle de temps ?
   (c) Mêmes questions entre les instants :
      - $t = 1$ et $t = 2$
      - $t = 2$ et $t = 3$
      - $t = 3$ et $t = 4$
      - $t = 4$ et $t = t_0$.
   (d) Comment peut-on retrouver graphiquement ces vitesses moyennes ?
4. Inventer une manière d'obtenir la vitesse initiale.

ACTIVITÉ 3.2 (Nombre dérivé).
On s'intéresse à la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 25$ et on appelle $\mathscr{P}$ sa courbe représentative.
On appelle :

- T le point de $\mathscr{P}$ d'abscisse 1 ;
- T_h le point de $\mathscr{P}$ d'abscisse $1 + h$ où h est un réel ;
- $\mathscr{D}_h$ la sécante (TT_h) ;
- m_h le coefficient directeur de $\mathscr{D}_h$.

1. On suppose que $h = 1$.
   (a) Déterminer l'abscisse x_1 et y_1 et l'ordonnée de T_1.
   (b) Déterminer m_1 le coefficient directeur de la droite $\mathscr{D}_1$.
2. En vous inspirant que la question précédente, compléter le tableau suivant :

h	1	0,5	0,1	0,01	0,001
x_h					
y_h					
m_h					

3. Montrer, par le calcul, que, dans le cas général, $m_h = -2 - h$ pour $h \neq 0$
4. Quand h *tend* vers 0 :
   (a) Vers quelle valeur *tend* m_h ?
   (b) Vers quel point *tend* T_h ?
   (c) Vers quelle droite *tend* la sécante $\mathscr{D}_h$?
   (d) En déduire l'équation réduite de cette droite.

On appellera *tangente* à $\mathscr{P}$ au point d'abscisse 1, la droite de laquelle se rapproche la sécante $\mathscr{D}_h$ quand h *tend* vers 0 et on appellera *nombre dérivé de* $f(x)$ *en* 1 le coefficient directeur de la tangente.

3.2 Bilan et compléments

3.2.1 Taux d'accroissement

Définition. On appelle *taux d'accroissement* d'une fonction f entre deux nombres *distincts* a et b le nombre :
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

On parle parfois d'*accroissement moyen* d'une fonction.

On écrit la plupart du temps $a + h$ à la place de b et la définition devient alors :

Définition 3.1. On appelle *taux d'accroissement* d'une fonction f entre deux nombres a et $a + h$, avec $h \neq 0$, le nombre :
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Les deux définitions sont équivalentes (il suffit de poser $b = a + h$). C'est la seconde que nous utiliserons pour la suite.

3.2.2 Nombre dérivé

On a vu dans les activités que ce taux d'accroissement ou accroissement moyen *tendait* vers un accroissement « instantané » quand h *tendait* vers 0. Cet accroissement « instantané » est appelé *nombre dérivé* en mathématiques, et on a donc la définition suivante :

Définition (Dérivabilité et nombre dérivé)**.** Si, quand h *tend* vers 0, la quantité $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ *tend* vers un nombre fini, on dit que la fonction f est *dérivable en a* et on appelle le nombre vers lequel tend cette quantité *nombre dérivé de* f *en a*. On le note $f'(a)$.

Remarques.

- On note parfois $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ le taux d'accroissement, surtout en physique.
  Δx est la différence [1] entre deux valeurs de x, $\Delta f(x)$ celle entre les deux valeurs correspondantes de $f(x)$.
- On note parfois $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ le nombre dérivé. Le d indique là encore une différence mais entre deux valeurs infiniment proches.
- Ces nombres correspondent à des quantités concrètes qui dépendent de la nature de la fonction f ou de la variable. Ainsi, si $f(t)$ est la distance parcourue au bout d'un temps t, la variation moyenne ne sera rien d'autre que la vitesse moyenne et le nombre dérivé est la vitesse instantanée.

Exemple 3.1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 7$ est-elle dérivable en $a = 2$?
Pour le savoir étudions la quantité suivante : $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$.

$$\begin{aligned}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} &= \frac{(2+h)^3-2^3}{h} = \frac{8+12h+6h^2+h^3-8}{h}\\ &= \frac{12h+6h^2+h^3}{h} = \frac{h(12+6h+h^2)}{h}\\ &= 12+6h+h^2 \text{ avec } h \neq 0\end{aligned}$$

Lorsque h *tend* vers 0 (en restant différent de 0), $12+6h+h^2$ *tend* vers 12. Donc f est dérivable en $a = 2$ et son nombre dérivé en 2 est 12. On note alors $f'(2) = 12$.

Notation lim

Pour alléger les rédactions, les mathématiciens on inventé une notation que nous utiliserons pour la suite : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ qui signifie, ici, « quand x tend vers a alors la quantité $f(x)$ tend vers b ». Elle peut être utilisée aussi bien avec a et b réels qu'avec $a = \pm\infty$ et $b = \pm\infty$. Ou bien même avec des suites : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ qui signifie que lorsque n devient grand la quantité $\frac{1}{n}$ tend, elle, vers 0.

Revenons sur la définition de la dérivablilité d'une fonction en un nombre a :

Définition 3.2. Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Si pour $a \in I$, $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = A$ avec A un réel, alors f est dite *dérivable en a* et on note A, $f'(a)$, ce nombre s'appelant *le nombre dérivé de* f *en a*.

1. Δ est la lettre grecque correspondant à D

Interprétation graphique du nombre dérivé

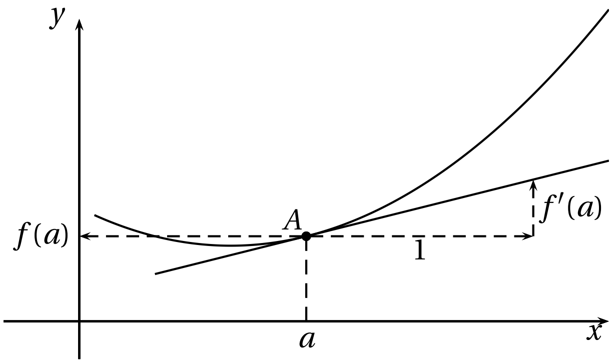
Définition 3.3 (Tangente à une courbe)**.** On appelle *tangente à une courbe* $\mathscr{C}$ *en un point* M, appartenant à $\mathscr{C}$, une droite passant par M et qui, si elle existe, est aux alentours de M, la droite la plus proche de $\mathscr{C}$.

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f et $A(a; f(a))$ et $B(a+h; f(a+h))$, deux points de cette courbe.
La quantité $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est le coefficient directeur de la droite (AB), sécante à la courbe.
Lorsque h *tend* vers 0, la sécante (AB) *tend* vers la tangente à la courbe au point A et le nombre $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ *tend* vers le coefficient directeur de la tangente en A.
On a donc la propriété suivante, qu'on admettra :

Propriété 3.1. *Soit f une fonction dérivable en a et $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.*
Le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a.

Le schéma 3.1 de la présente page illustre cette propriété.

FIGURE 3.1: Interprétation graphique du nombre dérivé



Remarque. Le point $A(a; f(a))$ est un point de la courbe et est *aussi* un point de la tangente ; en particulier, ses coordonnées vérifient l'équation de la tangente. Cela nous permet d'obtenir, dans le cas général, l'équation de la tangente.

Propriété 3.2. *Soit f une fonction définie et dérivable en a et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.*
Alors $\mathscr{C}$ admet en son point d'abscisse a une tangente T_a d'équation

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

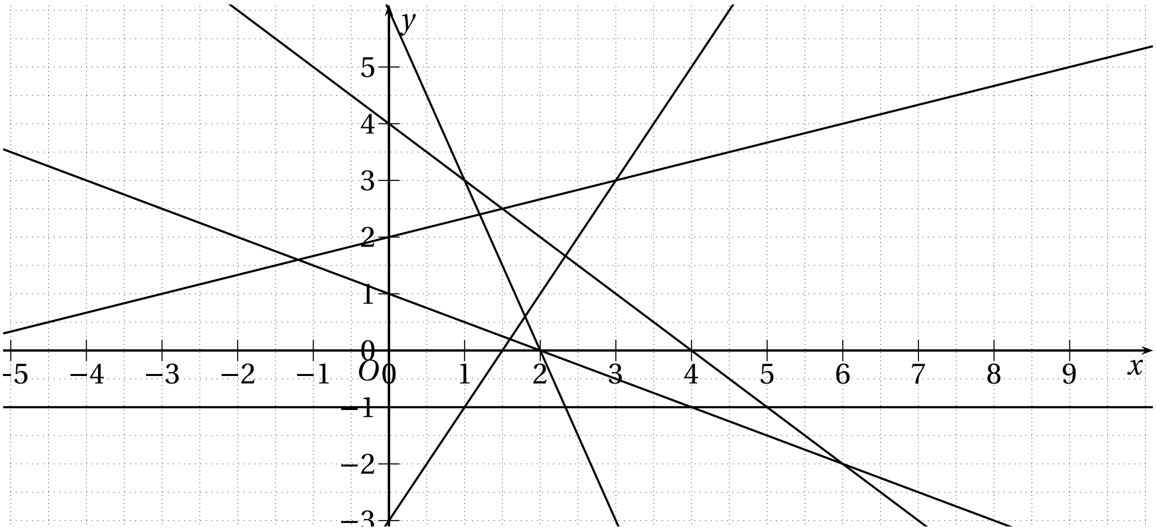
La preuve sera faite en classe.

3.3 Exercices

3.3.1 Coefficients directeurs (rappels)

EXERCICE 3.1.
Déterminer graphiquement les coefficients directeurs m des droites de la figure 3.2 de la présente page (on les indiquera sur le graphique).

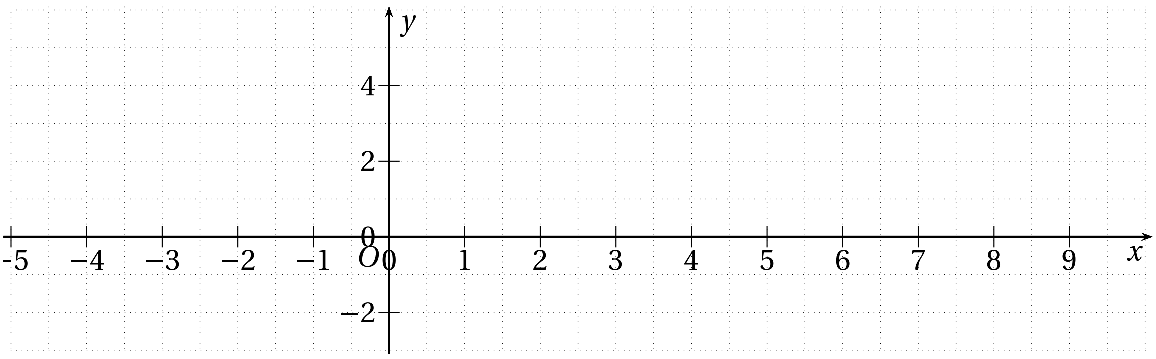
FIGURE 3.2: Figure de l'exercice 3.1



EXERCICE 3.2.
Dans le repère de la figure 3.3 de la présente page, représenter les droites suivantes :

- $\mathscr{D}_1$ passant par le point $A\,(0\,;1)$ et de coefficient directeur $m = 2$;
- $\mathscr{D}_2$ passant par le point $B\,(1\,;0)$ et de coefficient directeur $m = -1$;
- $\mathscr{D}_3$ passant par le point $C\,(-1\,;-1)$ et de coefficient directeur $m = \frac{1}{4}$;
- $\mathscr{D}_4$ passant par le point $D\,(1\,;2)$ et de coefficient directeur $m = -\frac{2}{3}$;
- $\mathscr{D}_5$ passant par le point $E\,(2\,;-3)$ et de coefficient directeur $m = \frac{3}{5}$;
- $\mathscr{D}_6$ passant par le point $A\,(0\,;3)$ et de coefficient directeur $m = 0$;

FIGURE 3.3: Figure de l'exercice 3.2

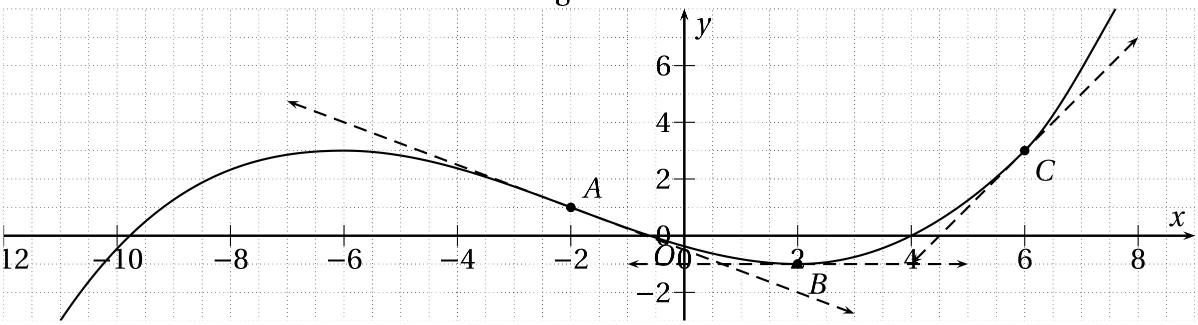


3.3.2 Lectures graphiques de nombres dérivés

EXERCICE 3.3.
On donne sur la figure 3.4 de la présente page la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f en y indiquant les droites tangentes aux points A, B et C.

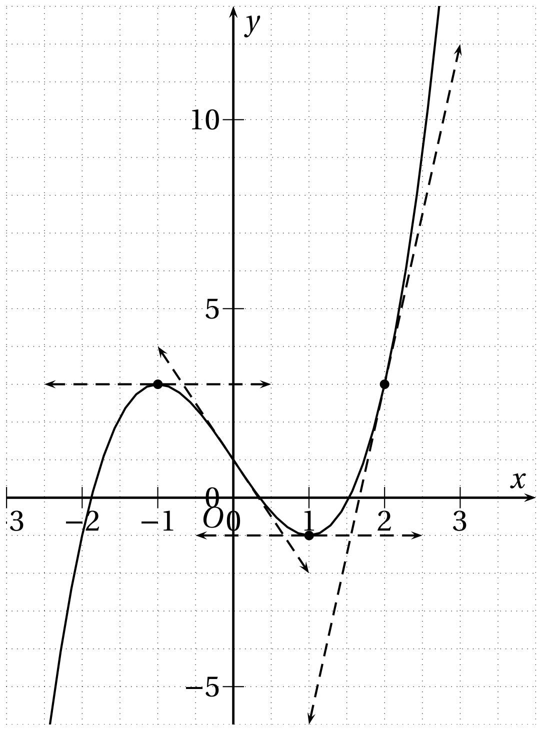
1. Donner par lecture graphique $f(-2)$ et $f(6)$
2. Donner par lecture graphique $f'(-2)$, $f'(6)$ et $f'(2)$
3. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -2.

FIGURE 3.4: Figure de l'exercice 3.3

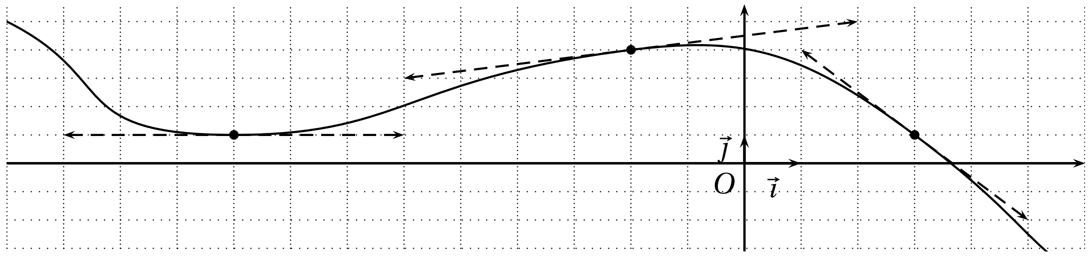


EXERCICE 3.4.
La courbe $\mathscr{C}$ de la figure ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dans un repère orthogonal.

1. Déterminer graphiquement :
   (a) $f(0)$ et $f'(0)$;
   (b) $f(-1)$ et $f'(-1)$;
   (c) $f(2)$ et $f'(2)$;
   (d) L'équation de la tangente T_{-1} au point d'abscisse -1 ;
   (e) L'équation de la tangente T_0 au point d'abscisse 0.
2. La droite T tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -2 et d'ordonnée -1 passe par le point A de coordonnées $(1\,;26)$
   (a) Déterminer par le calcul une équation de T.
   (b) En déduire $f'(-2)$.



EXERCICE 3.5.
On donne sur la figure ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction définie f sur $\mathbb{R}$ ainsi que les tangentes à cette courbe en certains points.



1. Donner par lecture graphique $f(3)$, $f(-2)$ et $f(-9)$.
2. Donner par lecture graphique $f'(3)$, $f'(-2)$ et $f'(-9)$.
3. Déterminer l'équation réduite de T, la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 3.

3.3.3 Tracés

EXERCICE 3.6.
Tracer une courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[-3;3]$ dont la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et ayant les propriétés suivantes :

- f est décroissante sur $[-3;0]$;
- $f(0) = -2$ et $f'(0) = 0$;
- $f(3) = 9$.

EXERCICE 3.7.
Tracer une courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[0;9]$ ayant les popriétés suivantes :

- $f(0) = 0$;
- $f(3) = 6$ et $f'(3) = 1$;
- $f(6) = 6$ et $f'(6) = -4$.
- $f(1) = 3$ et $f'(1) = 2$;
- $f(5) = 7$ et $f'(5) = 0$;

EXERCICE 3.8.
Tracer une courbe $\mathscr{C}$ représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[0;5]$ ayant les popriétés suivantes :

- $f(0) = 1$;
- $f(3) = -1$ et $f(5) = -1$;
- f est décroissante sur l'intervalle $[0;2]$;
- $f'(2) = 0$, $f'(3) = 1$ et $f'(5) = -1$;
- f admet en 2 un minimum égal à -3 ;
- pour tout $x \in [2;5]$, $f(x) < 0$.

3.3.4 Calculs de nombres dérivés

EXERCICE 3.9.
Dans chacun des cas suivants, déterminer si la fonction est dérivable et, le cas échant, déterminer par le calcul son nombre dérivé.

1. $f(x) = 3x + 7$ en -2.
2. $f(x) = x^2 - 2x$ en 3.
3. $f(x) = x^2 + 2x - 1$ en -1.
4. $f(x) = 2x^2 - x + 1$ en 4.
5. $f(x) = x^3 + 2x - 1$ en 1.
6. $f(x) = \frac{1}{x}$ en 1.
7. $f(x) = \sqrt{x}$ en 2.