Chapitre 2

Géométrie repérée

Sommaire

On se propose dans ce micro-chapitre *de rappeler des notions du programme de Seconde et de les réactiver à l'aide d'exercices.*

2.1 Rappels

2.1.1 Vecteurs sans coordonnées

Définition. Soient A et B deux points du plan.
On appelle *translation qui transforme A en B* la transformation qui à tout point M du plan associe l'unique point M' tel que $[AM']$ et $[BM]$ ont même milieu.

Définition 2.1. On appelle note et on appelle *vecteur* $\overrightarrow{AB}$ le bipoint associé à la translation qui transforme A en B.
A est appelé *origine du vecteur*, B est appelé *extrémité du vecteur*.

Définition 2.2. Deux vecteurs sont dits *égaux* s'ils sont associés à une même translation.

Propriété 2.1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ABDC$ *est un parallélogramme*

Remarque. Attention à l'ordre des lettres !

Définition 2.3. Un vecteur non nul est déterminé par :

- sa *direction* ;
- son *sens* ;
- et sa longueur, appelée *norme du vecteur*.

Et on a alors la propriété :

Propriété 2.2. *Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont la même direction, le même sens et la même norme.*

Définition 2.4. La somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur associé à la translation résultat de l'enchaînement des translations de vecteur $\vec{u}$ et de vecteur $\vec{v}$.

Propriété 2.3 (Relation de CHASLES)**.** *Pour tous points A, B et C, on a :* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Propriété 2.4 (Règle du parallélogramme)**.** *Pour tous points A, B, C et D on a :* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow$ *ABDC parallélogramme.*

Définition 2.5. On appelle *vecteur nul*, noté $\vec{0}$, tout vecteur dont son origine et son extrémité sont confondues. La translation associée laisse tous les points invariants.
On appelle *vecteurs opposés* tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\vec{u}+\vec{v} = \vec{0}$. On peut noter $\vec{u} = -\vec{v}$ ou $\vec{v} = -\vec{u}$.

Propriété 2.5. *Les vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{BA}$ *sont des vecteurs opposés. On a donc* $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ *et* $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Définition 2.6. Soit k un réel non nul et $\vec{u}$ un vecteur non nul. Alors le vecteur $k\vec{u}$ est un vecteur dont :

- la direction est la même que celle de $\vec{u}$
- le sens est le même que celui de $\vec{u}$ si $k > 0$, et de sens opposé si $k < 0$
- la norme est $|k| \times \|\vec{u}\|$

Définition 2.7. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits *colinéaires* s'ils ont même direction, ou s'il existe un nombre k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.

Remarque. Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur $\vec{u}$ car $0\vec{u} = \vec{0}$.

Propriété 2.6. *Soient A, B, C et D quatre points du plan.*

$$A, B, C \text{ alignés} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ colinéaires}$$

$$(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ colinéaires}$$

2.1.2 Vecteurs avec coordonnées

Propriété 2.7. *Le plan est muni d'une base* $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Pour tout vecteur $\vec{u}$ *du plan, il existe un unique couple* $(x; y)$*, appelé* coordonnées de $\vec{u}$*, tel que* $\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.

Remarque. On notera que l'origine du repère n'a pas d'importance dans les coordonnées d'un vecteur et que le vecteur nul a pour coordonnées $(0; 0)$.

Propriété 2.8. *Le plan est muni d'une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.*
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et k un nombre.

- $\vec{u}\,(x\,;\,y) = \vec{v}\,(x'\,;\,y') \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$
- *$\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x'\,;\,y + y')$*
- *$k\vec{u}$ a pour coordonnées $(kx\,;\,ky)$*

Propriété 2.9. *Le plan est muni d'un repère **orthonormé**.*
Alors la norme du vecteur $\overrightarrow{u}\,(x\,;\,y)$ est donnée par $\left\|\overrightarrow{u}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Définition 2.8. Le plan étant muni d'un repère $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on appelle *coordonnées* du point M le couple $(x\,;\,y)$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$, x étant appelé *abscisse* de M et y étant appelé *ordonnée* de M.

Les coordonnées du point M sont donc les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$. Cela implique qu'elles dépendent de l'origine du repère.

Propriété 2.10. *Le plan est muni d'un repère. Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ et $I(x_I; y_I)$ milieu de $[AB]$.*
Alors $x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$ et $y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$.

Propriété 2.11. *Le plan est muni d'un repère. Soit $A\,(x_A\,;\,y_A)$ et $B\,(x_B\,;\,y_B)$ deux points du plan.*
Alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A\,;\,y_B - y_A)$.

Propriété 2.12. *Le plan est muni d'un repère **orthonormé**.*
Soit A et B deux points du plan P de coordonnées respectives $(x_A\,;\,y_A)$ et $(x_B\,;\,y_B)$.
Alors la distance AB est donnée par $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Propriété 2.13. *Le plan est muni d'un repère.*
Soit $\vec{u}\,(x\,;\,y)$ et $\vec{v}\,(x'\,;\,y')$ deux vecteurs du plan.

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \Leftrightarrow xy' - x'y = 0.$$

Théorème 2.14. *Le plan est muni d'un repère.*

- *Toute droite du plan admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a\,;\,b) \neq (0\,;\,0)$.*
- *L'ensemble des points M du plan dont les coordonnées vérifient $ax + by + c = 0$ avec $(a\,;\,b) \neq (0\,;\,0)$ est une droite*

Définition 2.9. Le plan est muni d'un repère.
Soit $\mathscr{D}$ une droite et A et B deux points de cette droite. On appelle *vecteur directeur* de $\mathscr{D}$ tout vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$ colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

Théorème 2.15. *Le plan est muni d'un repère.*
Toute droite admettant une équation de la forme $ax + by + c = 0$ admet $\vec{v} = (-b\,;\,a)$ comme vecteur directeur.

Propriété 2.16. *Le plan est muni d'un repère.*
Soit $\mathscr{D}$ une droite d'équation réduite $y = mx + p$. Alors $\vec{v}\,(1\,;\,m)$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

Propriété 2.17. *Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.*

2.2 Exercices

EXERCICE 2.1.
Le plan est muni d'un repère quelconque.
On donne les points $A(-5;3)$, $B(-4;1)$ et $C(1;-4)$.

1. Déterminer les coordonnées de I, milieu de $[AC]$.
2. Déterminer les coordonnées de D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

EXERCICE 2.2.
Le plan est muni du repère $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. Soient les points $A(-9;-10)$, $B(2;9)$, $C(5;3)$, $D(-1;-8)$ et $E(3;0)$.

1. Les points C, D et E sont-ils alignés ?
2. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

EXERCICE 2.3.
Le plan est muni du repère $\left(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. On considère les points $A(-2;2)$, $B(-3;-3)$, $C(5;1)$ et $D(2;4)$.
E est le milieu du segment $[BC]$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère $ABCD$?
2. Montrer que $ABED$ est un parallélogramme.
3. Déterminer si O appartient à la droite (AE).

EXERCICE 2.4.
$ABCD$ est un parallélogramme.
A' est le symétrique de A par rapport à B et E est le milieu de $[BC]$.

1. Déterminer les coordonnées des points A', E et D dans le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$
2. Montrer que les points A', E et D sont alignés

Dans les exercices de ce paragraphe, le plan est muni d'un repère quelconque.

EXERCICE 2.5.
On considère les points $A(-1;2)$, $B(1;3)$ et $C(195;100)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
   À l'aide de cette équation déterminer si A, B et C sont alignés.
2. La droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=\frac{1}{2}x+1$ est-elle parallèle à (AB) ?
3. Le point C appartient-il à la droite Δ passant par le point $J(0;1)$ et de coefficient directeur $\frac{3}{5}$?

EXERCICE 2.6.
On donne $A(1;2)$, $B(2;1)$ et $C(-3;0)$. Déterminer les équations des droites suivantes :

1. $\mathscr{D}=(BC)$;
2. $\mathscr{D}'$ passant par C et de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$;
3. Δ parallèle à $\mathscr{D}$ passant par A ;

4. Δ' parallèle à $\mathscr{D}'$ passant par B.

EXERCICE 2.7.
Déterminer si les droites suivantes sont parallèles et, si elles ne le sont pas, déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

- $\mathscr{D}_1 : x + 2y - 1 = 0$
- $\mathscr{D}_2 : y = -\frac{x}{2} + 3$
- $\mathscr{D}_3 : -2x + 3y + 5 = 0$

EXERCICE 2.8.
ABC est un triangle non aplati. I et J sont les point tels que $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

1. Dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$, déterminer les coordonnées des points I et J.
2. Déterminer une équation cartésienne des droites (BC) et (IJ).
3. Montrer que la droite (IJ) passe par le milieu O du segment $[BC]$.

EXERCICE 2.9 (résolu)**.**
Vous trouverez ci-dessous des exemples « résolus » avec dans la première colonne le nom de la droite, dans la deuxième ses caractéristiques, dans la troisième une équation cartésienne et dans la quatrième son équation réduite.
Entraînez-vous à l'aide des caractéristiques de la droite à obtenir une équation cartésienne équivalente ou son équation réduite.

Nom	Caractéristiques	une équation cartésienne	l'équation réduite
$\mathscr{D}_1$	passant par $A\,(1\,;2)$ et $B\,(3\,;1)$	$x + 2y = 5$	$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$
$\mathscr{D}_2$	passant par A et $C\,(-1\,;-2)$	$2x - y = 0$	$y = 2x$
$\mathscr{D}_3$	passant par A et $D\,(-1\,;5)$	$3x + 2y = 7$	$y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$
$\mathscr{D}_4$	passant par B et de vecteur directeur $\overrightarrow{CD}$	$x = 3$	pas d'équation réduite
$\mathscr{D}_5$	passant par D et parallèle à (AC)	$2x - y = -7$	$y = 2x + 7$
$\mathscr{D}_6$	passant par C et parallèle à (AB)	$x + 2y = -5$	$y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$
$\mathscr{D}_7$	passant par A et de vecteur directeur $\vec{\imath}\,(1\,;0)$	$y - 2 = 0$	$y = 2$