

Devoir maison n°7

Droite d'EULER

À rendre pour le vendredi 5 juin.

On fournira un schéma manuscrit ou fait avec un logiciel de géométrie comme Geogebra sur lequel on représentera tous les objets géométriques rencontrés ou utilisés dans le devoir.

Le plan est muni d'un repère orthormé.

Soit $A(1; 4)$, $B(10; -1)$ et $C(1; -10)$.

On nomme A' , B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

On nomme enfin H_A , H_B et H_C les pieds des hauteurs du triangle ABC issues, respectivement, de A , B et C .

On appelle :

\mathcal{C} : Le cercle circonscrit au triangle ABC ;

Ω : Le centre de \mathcal{C} (c'est-à-dire le point de concours des médiatrices des côtés du triangle);

H : l'orthocentre du triangle ABC (c'est-à-dire le point de concours des hauteurs du triangle);

G : le centre de gravité du triangle ABC (c'est-à-dire le point de concours des médianes du triangle).

1. Déterminer les coordonnées de Ω et une équation cartésienne de \mathcal{C} .

2. Déterminer les coordonnées de H .

3. Déterminer les coordonnées de G .

4. Montrer que les points H , G et Ω sont alignés.

C'est vrai dans tout triangle non équilatéral : l'orthocentre, le centre du cercle circonscrit et le centre de gravité sont sur une même droite, appelée droite d'EULER; dans un triangle équilatéral ces trois points sont confondus.

5. Soit E le milieu de $[H\Omega]$ et \mathcal{C}' le cercle de centre E et passant par B' .

(a) Déterminer les coordonnées de E .

(b) Déterminer une équation cartésienne de \mathcal{C}' .

(c) Montrer que \mathcal{C}' passe aussi par les points A' , C' , H_A , H_B et H_C .

Ce cercle s'appelle le cercle d'EULER. Dans tout triangle, il passe par les milieux des côtés du triangle, par les pieds des hauteurs et aussi par les milieux des segments $[HA]$, $[HB]$ et $[HC]$. On l'appelle aussi, pour cette raison, le cercle des neuf points d'un triangle.