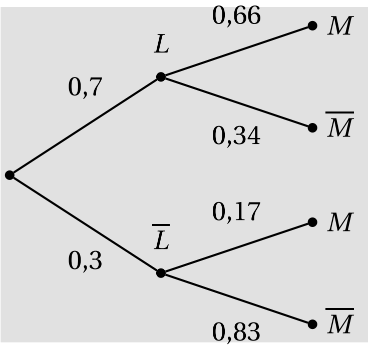
Un corrigé du devoir maison n°4

EXERCICE 4.1. 1. À l'aide des données de l'énoncé préciser les valeurs de $P(L)$, $P_L(M)$ et $P_{\overline{L}}\left(\overline{M}\right)$.

C'est une simple traduction de l'énoncé : $P(L) = 0,7$, $P_L(M) = 0,66$ et $P_{\overline{L}}\left(\overline{M}\right) = 0,83$

2. Construire un arbre pondéré suivant représentant la situation.



3. Calculer la probabilité que le cycliste interrogé soit licencié dans un club et ait réalisé le parcours en moins de 5 heures.

La formule générale est attendue :
$P(L \cap M) = P(L) \times P_L(M) = 0,7 \times 0,66 = 0,462$

4. Justifier que $P(M) = 0,513$.

Il s'agit ici d'utiliser la formule des probabilités totales. Il faut signaler pourquoi on peut l'utiliser et indiquer son nom :
Comme L et $\overline{L}$ réalisent une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales :
$P(M) = P(M \cap L) + P(M \cap \overline{L}) = 0,462 + 0,3 \times 0,17 = 0,462 + 0,051 = 0,513$

5. Un organisateur affirme qu'au moins 90 % des cyclistes ayant fait le parcours en moins de 5 heures sont licenciés dans un club. A-t-il raison? Justifier la réponse.

On cherche à déterminer si $P_M(L) \geqslant 0,9$.
$P_M(L) = \frac{P(M \cap L)}{P(M)} = \frac{0,462}{0,513} \approx 0,9006$
Il fallait donc un arrondi au millième ou au dix-millième pour pouvoir conclure :
$P_M(L) \geqslant 0,9$ donc l'organisateur a raison.

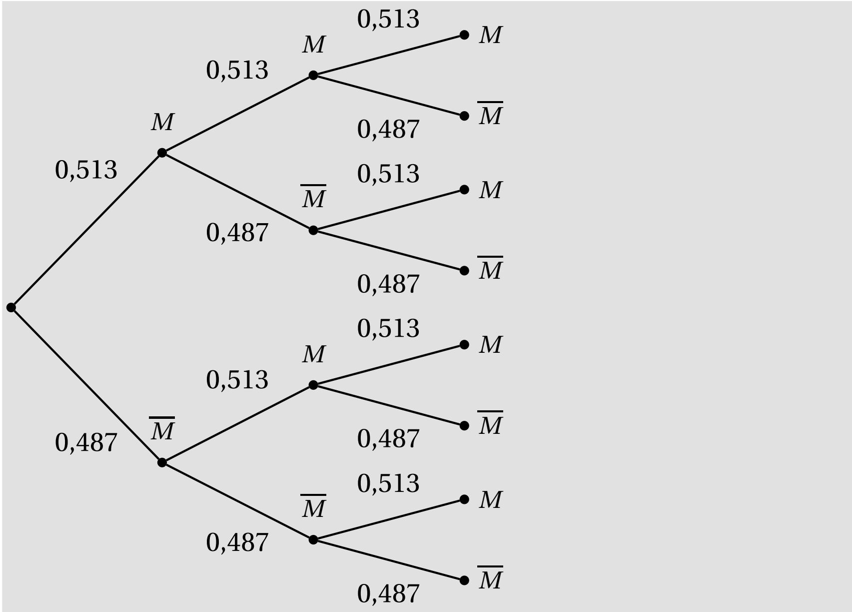
6. Un journaliste interroge indépendamment trois cyclistes au hasard. On suppose le nombre de cyclistes suffisamment important pour assimiler le choix de trois cyclistes à un tirage aléatoire avec remise.

(a) Calculer la probabilité, arrondie au millième, qu'exactement deux des trois cyclistes aient réalisé le parcours en moins de cinq heures.

On pourra consulter l'arbre fourni ci-après pour comprendre la démarche.
Soit p la probibilité cherchée. Comme on peut le voir sur l'arbre, où le premier niveau indique les éventualités pour le premier cycliste, le deuxième les éventualités pour le deuxième cycliste et le troisième les éventualités pour le troisième cycliste, $p = P\left(M \cap M \cap \overline{M}\right) + P\left(M \cap \overline{M} \cap M\right) + P\left(\overline{M} \cap M \cap M\right) = 3 \times 0,513^2 \times 0,487 \approx 0,384$

(b) Calculer la probabilité, arrondie au millième, qu'au moins une des trois cyclistes ait réalisé le parcours en moins de cinq heures.

Toujours en utilisant l'arbre, on s'aperçoit que l'évènement est le contraire de « aucun cycliste n'a réalisé le parcours en moins de cinq heures »
Soit p' la probabilité cherchée : $p' = 1 - P\left(\overline{M} \cap \overline{M} \cap \overline{M}\right) = 1 - 0,487^3 \approx 0,884$.



EXERCICE 4.2.

La suite (u_n) est définie par : $(u_n) : \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 4 - \frac{4}{u_n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. (a) Déterminer les trois premiers termes de la suite (u_n).

$u_0 = 3 \quad u_1 = 4 - \frac{4}{u_0} = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \quad u_2 = 4 - \frac{4}{u_1} = 4 - \frac{4}{\frac{8}{3}} = \frac{5}{2}$

   (b) La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ? *On justifiera.*

$u_1 - u_0 = -\frac{1}{3} \neq u_2 - u_1 = -\frac{1}{6}$ donc (u_n) n'est pas arithmétique.
$\frac{u_1}{u_0} = \frac{8}{9} \neq \frac{u_2}{u_1} = \frac{15}{16}$ donc la suite (u_n) n'est pas non plus géométrique.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{1}{u_n - 2}$. On admet que la suite (v_n) est bien définie.

   (a) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique et préciser son premier terme et sa raison.

Un calcul de v_0, v_1 et v_2 permet de conjecturer que la suite est arithmétique de raison $\frac{1}{2}$: $v_0 = 1$, $v_1 = \frac{3}{2}$ et $v_2 = 2$ et donc $v_1 - v_0 = v_2 - v_1 = \frac{1}{2}$ mais cela ne prouve pas qu'elle l'est.
Pour le prouver on peut montrer que $v_{n+1} - v_n$ est une contante égale à $\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{u_{n+1}-2} - \frac{1}{u_n-2} &&= \frac{1}{4-\frac{4}{u_n}-2} - \frac{1}{u_n-2} \\ &= \frac{1}{2-\frac{4}{u_n}} - \frac{1}{u_n-2} &&= \frac{1}{\frac{2u_n-4}{u_n}} - \frac{1}{u_n-2} \\ &= \frac{u_n}{2u_n-4} - \frac{1}{u_n-2} &&= \frac{u_n}{2(u_n-2)} - \frac{1}{u_n-2} \\ &= \frac{u_n}{2(u_n-2)} - \frac{2}{2(u_n-2)} &&= \frac{u_n-2}{2(u_n-2)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc $v_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}$. (v_n) est bien une suite arithmétique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison $r = \frac{1}{2}$.

   (b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

Comme (v_n) est une suite arithmétique $v_n = v_0 + n \times r = 1 + \frac{1}{2}n$.
On sait que $v_n = \frac{1}{u_n-2} \Leftrightarrow u_n - 2 = \frac{1}{v_n} \Leftrightarrow u_n = \frac{1}{v_n} + 2 = \frac{1}{1+\frac{1}{2}n} + 2$.

   (c) Déterminer la valeur exacte de u_{100}.

$u_{100} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}\times 100} + 2 = \frac{1}{51} + 2 = \frac{103}{51}$.

PROBLÈME 4.1.

Soit f une fonction affine de la forme $f(x) = mx + p$ où m est un réel différent de 0 et 1 et p un réel quelconque.
Soit (u_n) la suite telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

Partie A : Étude théorique

1. Déterminer, en fonction de m et de p, le nombre q tel que $f(q) = q$.

$f(q) = q \Leftrightarrow mq + p = q \Leftrightarrow p = q - mq = q(1-m) \Leftrightarrow q = \frac{p}{1-m}$ car $m \neq 1$.

2. Montrer que la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - q$ est géométrique.

$v_{n+1} = u_{n+1} - q = mu_n + p - q$ or $mq + p = q \Leftrightarrow p - q = -mq$ donc $v_{n+1} = mu_n - mq = m(u_n - q) = mv_n$. La suite (v_n) est donc bien géométrique de raison m.

3. En déduire une expression de v_n, puis de u_n, en fonction de u_0, m, p et n.

Comme (v_n) est géométrique $v_n = v_0 \times m^n = (u_0 - q)m^n = \left(u_0 - \frac{p}{1-m}\right)m^n$.
$v_n = u_n - q \Leftrightarrow u_n = v_n + q = \left(u_0 - \frac{p}{1-m}\right)m^n + \frac{p}{1-m}$.

Partie B : Application

Martin a le projet de partir 6 mois en voyage à la recherche de bons *spots* de surf. Pour cela, il souhaite acquérir un *van* et l'aménager. Il estime le coût final de son véhicule à 15 000 €.
Le 1er janvier 2014, il dépose 6 000 € sur un compte-épargne à intérêts composés rémunéré à 2,5 % par an. Il décide de plus de s'astreindre à déposer chaque 1er janvier des années suivantes 800 € sur ce compte.
Il se demande quand il pourra partir.
Pour répondre à cette question, on pose u_n la somme disponible sur son compte le 1er janvier de l'année $2014 + n$.

Les résultats seront, au besoin, arrondis au centime d'euro.

1. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1{,}025u_n + 800$.

$u_{n+1} = u_n + \frac{2{,}5}{100}u_n + 800 = u_n\left(1 + \frac{2{,}5}{100}\right)u_n + 800 = 1{,}025u_n + 800$.

2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier.

$u_0 = 6\,000 \quad u_1 = 1{,}025u_0 + 800 = 6\,950 \quad u_2 = 1{,}025u_1 + 800 = 7\,923{,}75$.
$u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ donc la suite n'est pas arithmétique. $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ donc la suite n'est pas géométrique.

3. (a) Déterminer la suite (v_n) auxiliaire de (u_n).

On a $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f(x) = mx + p = 1{,}025x + 800$ donc $v_n = u_n - q = u_n - \frac{p}{1-m} = u_n - \frac{800}{1-1{,}025} = u_n + 32\,000$.

(b) Montrer que (v_n) est géométrique.

$v_{n+1} = u_{n+1} + 32\,000 = 1{,}025u_n + 600 + 32\,000 = 1{,}025u_n + 32\,600 = 1{,}025(u_n + 32\,000) = 1{,}025v_n$ donc (v_n) est géométrique de raison 1,025 et de premier terme $v_0 = u_0 + 32\,000 = 6\,000 + 32\,000 = 38\,000$.

(c) En déduire l'expression de v_n, puis de u_n, en fonction de n.

Comme (v_n) est géométrique $v_n = v_0 \times 1{,}025^n = 38\,000 \times 1{,}025^n$.
$v_n = u_n + 32\,000 \Leftrightarrow u_n = v_n - 32\,000 = 38\,000 \times 1{,}025^n - 32\,000$.

4. (a) Étudier la monotonie de (u_n).

$$\begin{array}{rcl} & 1 & \leqslant & 1{,}025 \\ \Leftrightarrow & 1{,}025^n & \leqslant & 1{,}025^{n+1} \\ \Leftrightarrow & 38\,000 \times 1{,}025^n & \leqslant & 38\,000 \times 1{,}025^{n+1} \\ \Leftrightarrow & 38\,000 \times 1{,}025^n - 32\,000 & \leqslant & 38\,000 \times 1{,}025^{n+1} - 32\,000 \\ \Leftrightarrow & u_n & \leqslant & u_{n+1} \end{array}$$

Donc (u_n) est croissante.

(b) Déterminer à quelle date il pourra partir.

$u_8 \approx 14\,299{,}31$ et $u_9 \approx 15\,456{,}79$ et la suite (u_n) est croissante c'est donc à partir de $n = 9$, soit en 2014+9=2023 qu'il pourra partir.