Chapitre 13

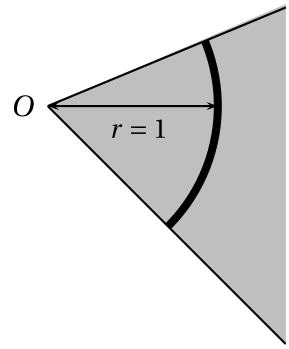
Trigonométrie

Sommaire

13.1 Notion d'angle

13.1.1 Une nouvelle mesure d'angle : le radian

Définition 13.1 (Angle, mesure de l'angle en radian)**.** Dans un plan, un *angle* de sommet O est l'ensemble des points du plan délimité par deux demi-droites de même sommet O.
La *mesure* de cet angle, en radian, est la longueur de l'arc de cercle de centre O et de rayon 1 intercepté par cet angle.



EXERCICE 13.1.
Le plan est muni d'un repère orthonormé.

1. Quel est le périmètre d'un cercle de rayon 1 ?
2. En déduire la mesure en radian d'un angle de 360°.
3. On admet que la longueur de l'arc intercepté par un secteur angulaire est proportionnelle à la mesure de l'angle. Compléter alors le tableau suivant (les valeurs exactes sont attendues) :

Mesure de l'angle en degré	0	30	45	60	90	180	360
Mesure de l'angle en radian							

13.1.2 Angles orientés géométriques

Orientation d'un cercle ou du plan

Définition 13.2 (Orientation du plan)**.** On utilisera le vocabulaire suivant :

Orienter un cercle : C'est choisir un sens de parcours sur ce cercle appelé *sens direct* (ou positif). L'autre sens est appelé *sens indirect* (négatif ou rétrograde).

Orienter le plan : C'est orienter tous les cercles du plan dans le même sens.

L'usage est de choisir pour sens direct le sens contraire des aiguilles d'une montre (appelé aussi *sens trigonométrique*).

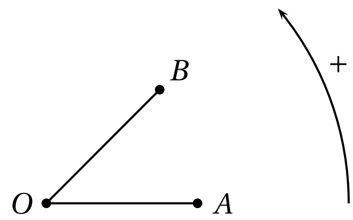
Dans la suite du chapitre, on supposera que le plan est orienté dans ce sens.

Cercle trigonométrique

Définition 13.3 (Cercle trigonométrique)**.** *Un cercle trigonométrique* est un cercle orienté dans le sens direct et de rayon 1. Lorsque le plan est muni d'un repère $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ orthonormé, le cercle trigonométrique est le cercle orienté dans le sens direct, de centre O et de rayon 1.

Angles orientés géométriques

Quand le plan est orienté les mesures des angles, qu'elles soient en degré ou en radian, sont positives quand l'angle est dans le sens direct, négatives quand l'angle est dans le sens indirect.
Ainsi, sur le schéma ci-contre, $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{4}$ alors que $\widehat{BOA} = -\frac{\pi}{4}$.



13.1.3 Angle orienté de vecteurs

Angle orienté de vecteurs

Définition 13.4 (Angle orienté de vecteurs)**.** Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan orienté.
On appelle *angle orienté*, noté $(\vec{u}\,;\,\vec{v})$, le couple de ces deux vecteurs.

Mesures des angles orientés

Définition 13.5 (Mesure d'un angle orienté de vecteurs)**.** Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan orienté et O, A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.
Une mesure de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u}\,;\,\vec{v})$ est une mesure de l'angle géométrique orienté $\widehat{AOB}$.

Définition 13.6 (Mesure principale)**.** La *mesure principale* d'un angle orienté est l'unique mesure de cet angle orienté qui appartient à $]-\pi\,;\,\pi]$.

On admettra que cette mesure est unique.

Remarques.

- Si une des mesures de $(\vec{u}\,;\,\vec{v})$ est α, alors toutes les mesures sont de la forme $\alpha + k\times 2\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

- Par abus de langage, on confond un angle et ses mesures. On écrit par exemple $(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = \frac{\pi}{2} + k\times 2\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

- $(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = \frac{\pi}{2} + k\times 2\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$ peut aussi s'écrire :
  $(\vec{u}\,;\,\vec{v}) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \equiv \frac{\pi}{2}\ (2\pi) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ qui se lit « $(\vec{u}\,;\,\vec{v})$ est *congru* à $\frac{\pi}{2}$ *modulo* 2π ».

Propriété 13.1. *Soient un vecteur non nul $\vec{u}$ du plan orienté et $k\in\mathbb{R}^*$.*

- $(\vec{u}\,;\,\vec{u}) \equiv 0 \pmod{2\pi}$.
- $(\vec{u}\,;\,-\vec{u}) \equiv \pi \pmod{2\pi}$.
- *Si $k>0$ alors* $(\vec{u}\,;\,k\vec{u}) \equiv 0 \pmod{2\pi}$.
- *Si $k<0$ alors* $(\vec{u}\,;\,k\vec{u}) \equiv \pi \pmod{2\pi}$.

Propriété 13.2 (Relation de Chasles (admise))**.** *Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls du plan orienté.*

$$(\vec{u}\,;\,\vec{v}) + (\vec{v}\,;\,\vec{w}) \equiv (\vec{u}\,;\,\vec{w}) \pmod{2\pi}$$

On en déduit :

Propriété 13.3. *Soit $\vec{u}$ et $\vec{u}$ deux vecteurs non nuls du plan orienté, k et k′ deux réels non nuls.*

- $(\vec{u}\,;\,\vec{v}) \equiv -(\vec{v}\,;\,\vec{u}) \pmod{2\pi}$.
- $(-\vec{u}\,;\,\vec{v}) \equiv (\vec{u}\,;\,\vec{v}) + \pi \pmod{2\pi}$.
- $(\vec{u}\,;\,-\vec{v}) \equiv (\vec{u}\,;\,\vec{v}) + \pi \pmod{2\pi}$.
- $(-\vec{u}\,;\,-\vec{v}) \equiv (\vec{u}\,;\,\vec{v}) \pmod{2\pi}$.
- *Si k et k′ sont de même signe,* $(k\vec{u}\,;\,k'\vec{v}) \equiv (\vec{u}\,;\,\vec{v}) \pmod{2\pi}$.
- *Si k et k′ sont de signes opposés,* $(k\vec{u}\,;\,k'\vec{v}) \equiv (\vec{u}\,;\,\vec{v}) + \pi \pmod{2\pi}$.

Les preuves seront faites en classe.

13.1.4 Angles orientés

En général, en mathématiques, on n'oriente pas le plan pour les angles géométriques, qui ne sont alors pas orientés, mais on oriente systématiquement le plan pour les angles de vecteurs.
Sauf précision contraire, donc, lorsqu'on parle d'un angle géométrique, il est sous-entendu qu'il n'est pas orienté, et lorsqu'on parle d'un angle de vecteurs, il est sous-entendu qu'il est orienté.

13.2 Cosinus et sinus d'un réel x

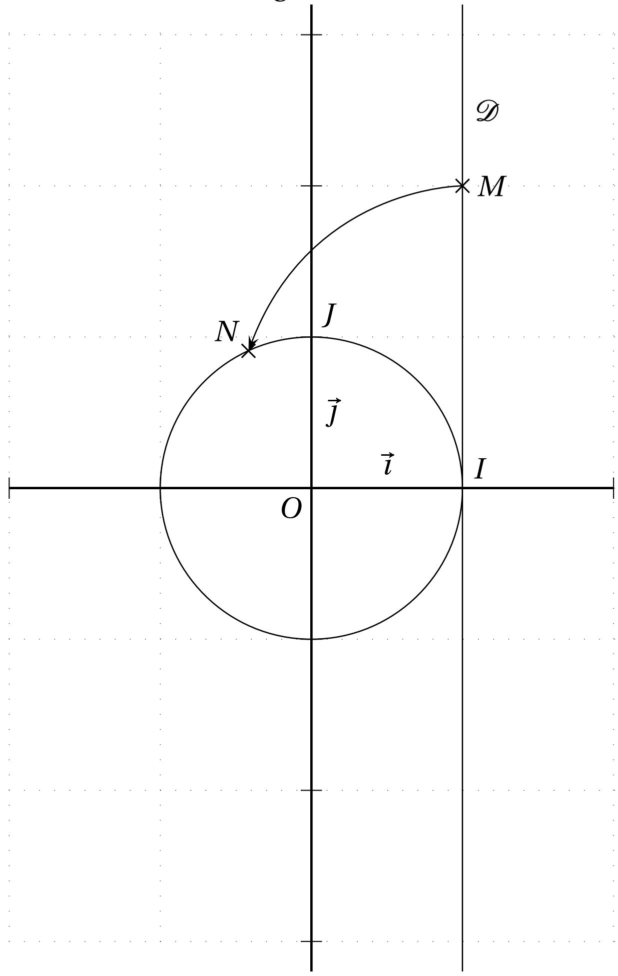
Dans cette section on considère que le plan est muni d'un repère orthonormé orienté (aussi bien pour les angles géométriques que pour les angles de vecteurs). L'unité des mesures des angles est le radian.

13.2.1 Enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique

ACTIVITÉ 13.1.
On a représenté sur la figure 13.1 page suivante le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x = 1$ qui coupe l'axe (Ox) en I.
À tout nombre a, on associe le point $M(1\,;\,a)$ de la droite $\mathscr{D}$.
« L'enroulement » de la droite $\mathscr{D}$ autour du cercle $\mathscr{C}$ met en coïncidence le point M avec un point N de $\mathscr{C}$. Plus précisément, si a est positif, le point N est tel que $\overset{\frown}{IN} = IM = a$, l'arc étant mesuré dans le sens inverse des aiguilles d'une montre et, si a est négatif, le point N est tel que $\overset{\frown}{IN} = IM = |a|$, l'arc étant mesuré dans le sens des aiguilles d'une montre.
Le point N est le point du cercle $\mathscr{C}$ associé au nombre a par « enroulement de la droite des réels $\mathscr{D}$ sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ ».

1. Placer les points M_a de la droite $\mathscr{D}$ dont les ordonnées a respectives sont : $0; \frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}; \pi; -\pi$.
2. Placer les points N_a du cercle associés à ces nombres a.
3. Indiquer un nombre associé à chacun des points I, J, $I'(-1;0)$ et $J'(0;-1)$.
4. Existe-t-il plusieurs nombres associés à un même point ? Donner quatre nombres associés au point J.

FIGURE 13.1: Figure de l'activité 13.1



13.2.2 Cosinus et sinus d'un angle orienté

Définition 13.7 (Cosinus et sinus d'un réel)**.** Pour tout réel x, il existe un point N unique du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ tel que x soit une mesure de $\left(\vec{\imath}\,;\overrightarrow{ON}\right) = \widehat{ION}$.

- L'abscisse du point N est le cosinus de x, noté $\cos(x)$.
- L'ordonnée du point N est le sinus de x noté $\sin(x)$.

Remarque. Quand il n'y a pas de risque de confusion, on note parfois $\cos x$ ou $\sin x$ à la place de $\cos(x)$ ou $\sin(x)$ pour alléger les écritures.

Définition 13.8 (Cosinus et sinus d'un angle orienté)**.** Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. Le cosinus (resp. le sinus) de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{u}\,;\vec{v})$ est le cosinus (resp. le sinus) de l'une quelconque de ses mesures. On note $\cos(\vec{u}\,;\vec{v})$ et $\sin(\vec{u}\,;\vec{v})$.

Lien entre cosinus de l'angle orienté et cosinus de l'angle géométrique non orienté

Notons α la mesure en radians de l'angle géométrique non orienté $\widehat{AOB}$ formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et notons x la mesure principale de $(\vec{u}\,;\vec{v})$. On a $\alpha = |x|$. Deux cas se présentent :

- si $x \geqslant 0$, $|x| = x$ et par suite $\cos(\alpha) = \cos(x)$;
- si $x \leqslant 0$, $|x| = -x$ et par suite $\cos(\alpha) = \cos(-x) = \cos(x)$

On a donc $\cos(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = \cos(\widehat{AOB})$.
Ce n'est pas vrai pour le sinus : $\sin(\widehat{AOB}) = |\sin(\vec{u}\,;\,\vec{v})|$

13.2.3 Premières propriétés

Les preuves seront faites en classe.

Propriété 13.4. $\forall x \in \mathbb{R}$ *:*

$$(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1 \qquad -1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1 \qquad -1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$$

Remarque. Pour alléger les écritures, on note souvent $(\cos(x))^2 = \cos^2(x) = \cos^2 x$ et $(\sin(x))^2 = \sin^2(x) = \sin^2 x$; le premier point devient alors : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Propriété 13.5 (Sinus et cosinus des angles usuels)**.**

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

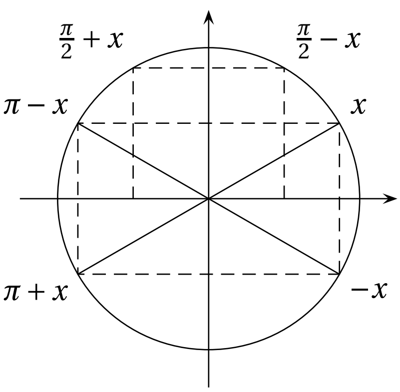
13.2.4 Lignes trigonométriques

Les formules ci-dessous sont vraies pour tout réel x, mais pour faciliter la mémorisation, on se place dans le premier cadran. Elles pourront être démontrées plus tard dans l'année.

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$

$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
$\sin(\pi - x) = \sin(x)$



$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$

$\cos(-x) = \cos(x)$
$\sin(-x) = -\sin(x)$

13.2.5 Équations trigonométriques

Il s'agit dans ce paragraphe d'apprendre à résoudre dans un intervalle I de $\mathbb{R}$, ou sur $\mathbb{R}$, des équations en x comportant un cosinus ou un sinus, c'est-à-dire à trouver tous les x de l'intervalle I vérifiant ce type d'équations.

Équations se ramenant à $\cos(x) = \alpha$ **ou** $\sin(x) = \beta$

$\cos(x) = \alpha$

Propriété 13.6. *Soit une équation de la forme* $\cos(x) = \alpha$.
Si on trouve un a *tel que* $\cos(a) = \alpha$ *alors l'équation est équivalente à l'équation* $\cos(x) = \cos(a)$ *et les solutions de l'équation sont les réels* $a + k \times 2\pi$ *et les réels* $-a + k \times 2\pi$*, où* k *entier quelconque.*

On l'admettra (des éléments de preuve seront donnés en classe).

On ne peut donc résoudre, en Première, ce type d'équation que si l'on connait un réel a particulier tel que $\cos(a) = \alpha$. On notera que la calculatrice, avec sa touche $\cos^{-1}$, peut fournir une valeur (la plupart du temps approchée) de ce réel a.

$\sin(x) = \beta$

Propriété 13.7. *Soit une équation de la forme* $\sin(x) = \beta$.
Si on trouve un b *tel que* $\sin(b) = \beta$ *alors l'équation est équivalente à l'équation* $\sin(x) = \sin(b)$ *et les solutions de l'équation sont les réels* $b + k \times 2\pi$ *et les réels* $\pi - b + k \times 2\pi$*, où* k *entier quelconque.*

On l'admettra (des éléments de preuve seront donnés en classe).

On ne peut donc résoudre ce type d'équation que si l'on connait un réel b particulier tel que $\sin(b) = \beta$. On notera que la calculatrice, avec sa touche $\sin^{-1}$, peut fournir une valeur (la plupart du temps approchée) de ce réel b.

Équations se ramenant à $\cos(px) = \alpha$ **ou** $\sin(px) = \beta$

p est un réel quelconque différent de 0.
La méthode est la même jusqu'à obtenir $px \equiv c \pmod{2\pi}$ ou bien $px = c + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
On a alors $x \equiv \frac{c}{p} \pmod{\frac{2\pi}{p}}$ ou bien $x = \frac{c}{p} + k \times \frac{2\pi}{p}, k \in \mathbb{Z}$.
Les solutions ne sont donc plus « à un certain nombre de tours près ».

Exemple. Résoudre l'équation $\cos(2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$:

1. dans $\mathbb{R}$;
2. dans $[0\,;2\pi]$;
3. dans $]-\pi\,;\pi]$.

1. On sait que $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. On a donc :

$$\begin{array}{rcl} \cos(2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} & \Leftrightarrow & \cos(2x) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\ & \Leftrightarrow & 2x \equiv \frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi} \text{ ou } 2x \equiv -\frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi} \\ & \text{ou bien} & 2x = \frac{3\pi}{4} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ ou } 2x = -\frac{3\pi}{4} + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ & \Leftrightarrow & x \equiv \frac{3\pi}{8} \pmod{\pi} \text{ ou } x \equiv -\frac{3\pi}{8} \pmod{\pi} \\ & \text{ou bien} & x = \frac{3\pi}{8} + k \times \pi, k \in \mathbb{Z} \text{ ou } x = -\frac{3\pi}{8} + k \times \pi, k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Remarque. Les solutions obtenues sont « à un certain nombre de demis-tours près ».

L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions est donc

$$\mathscr{S} = \left\{x \equiv \frac{3\pi}{8} \pmod{\pi}\,;\, x \equiv -\frac{3\pi}{8} \pmod{\pi}\right\}$$

ou bien

$$\mathscr{S} = \left\{x = \frac{3\pi}{8} + k \times \pi\,;\, x = -\frac{3\pi}{8} + k \times \pi, \forall k \in \mathbb{Z}\right\}$$

2. x n'est solution que si $x \in \mathscr{S} \cap [0\,;2\pi]$.
   Un petit tableau peut nous y aider :

k	...	-2	-1	0	1	2	3	...
$\frac{3\pi}{8}+k\times\pi$	...	$-\frac{13\pi}{8}$	$-\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{19\pi}{8}$	$\frac{27\pi}{8}$	...
$-\frac{3\pi}{8}+k\times\pi$	...	$-\frac{17\pi}{8}$	$-\frac{11\pi}{8}$	$-\frac{3\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{21\pi}{8}$	...

   Comme $[0\,;2\pi] = \left[0\,;\frac{16\pi}{8}\right]$, l'ensemble $\mathscr{S}'$ des solutions est donc
   $$\mathscr{S}' = \left\{\frac{3\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{13\pi}{8}\right\}$$

3. x n'est solution que si $x \in \mathscr{S} \cap]-\pi\,;\pi]$.
   Comme $]-\pi\,;\pi] = \left]-\frac{8\pi}{8}\,;\frac{8\pi}{8}\right]$, d'après le tableau précédent, l'ensemble $\mathscr{S}''$ des solutions est donc
   $$\mathscr{S}'' = \left\{-\frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, -\frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right\}$$

13.2.6 Inéquations trigonométriques

Pour résoudre des inéquations, donc comportant une inégalité, on résoud l'équation associée et on utilise ensuite les propriétés géométriques du cosinus et du sinus à l'aide du cercle trigonométrique ou de la courbe des fonctions cosinus et sinus que nous allons introduire dans la section suivante.

13.3 Fonctions trigonométriques

13.3.1 Périodicité d'une fonction

Définition. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ ou sur une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$.
Si f est telle que, pour tout x de son ensemble de définition, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = f(x+a)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ alors f est dite périodique et le plus petit nombre positif α tel que $f(x) = f(x+\alpha)$ est appelé la période de f. On dit parfois que f est α-périodique.

Remarques.

- Si f est α-périodique, alors tous les nombres a tels que $f(x) = f(x+a)$ sont de la forme $a = k\times\alpha$ où $k \in \mathbb{Z}$.

  Ainsi, par exemple, si f est de 3-périodique, alors $\ldots = f(x-6) = f(x-3) = f(x) = f(x+3) = f(x+6) = \ldots$ et, réciproquement, si $f(x) = f(x+a)$ alors $a = k\times 3$.

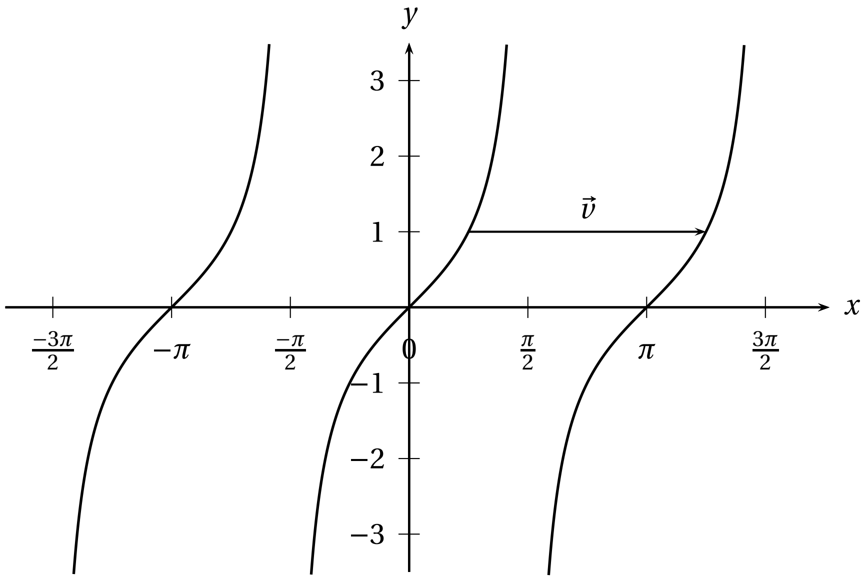
- On peut avoir $f(x) = f(x+k)$ sans que la fonction soit k-périodique. Sur l'exemple du point précédent, on a $f(x) = f(x+6)$ or la fonction n'est pas 6-périodique mais 3-périodique : il faut donc s'assurer que k est le plus petit réel tel que $f(x) = f(x+k)$ pour pouvoir affirmer que le fonction est k-périodique.

- Il est utile d'étudier la périodicité d'une fonction pour réduire le domaine sur lequel on va étudier son comportement : il suffit alors de l'étudier sur un intervalle d'amplitude une période. Ainsi on limitera l'étude d'une fonction 2π-périodique, par exemple, à l'intervalle $[0\,;2\pi]$ ou bien à l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$, tous deux d'amplitude 2π et on « translate » ensuite l'étude.

Propriété. *Soit f une fonction périodique et de période α.*
Alors la courbe de f est globalement invariante par translation de vecteur $\vec{v} = (\alpha\,;0)$

Exemple. La figure 13.2 de la présente page présente un exemple de courbe d'une fonction π-périodique.

FIGURE 13.2: La courbe d'une fonction π-périodique



13.3.2 Fonction cosinus

Définition

Définition 13.9. On appelle *fonction cosinus* la fonction qui à tout réel x associe son cosinus.

$$x \longmapsto \cos x$$

Tout réel x ayant un cosinus, la fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$.

Quelques propriétés

Les réels x et $-x$ sont associés par enroulement de la droite réelle sur le cercle trigonométrique à des points symétriques par rapport à l'axe des abscisses, qui ont donc la même abscisse. Or ces abscisses sont, par définition $\cos x$ et $\cos(-x)$ donc $\cos x = \cos(-x)$. La fonction cosinus est donc paire.

Propriété 13.8. *La fonction cosinus est paire.*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos x = \cos(-x)$$

Sa courbe représentative est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Par enroulement de la droite réelle sur le cercle trigonométrique, les réels x, $x+2\pi$, $x+4\pi$, $\ldots$, $x+k\times 2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ sont associés au même point. On a donc $\cos x = \cos(x+2\pi) = \cos(x+4\pi) = \ldots = \cos(x+k\times 2\pi)$. La fonction cosinus est donc périodique et on admettra que le plus petit nombre α tel que $\cos x = \cos(x+\alpha)$ est $\alpha = 2\pi$, donc que sa période est 2π.

Propriété 13.9. *La fonction cosinus est périodique et de période* 2π.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos x = \cos(x + 2\pi)$$

On étudie alors la fonction cosinus sur un intervalle d'amplitude 2π, par exemple $[-\pi\,;\,\pi]$ puis on « translate » l'étude car la fonction est 2π-périodique. Et l'on peut même réduire à l'intervalle $[0\,;\,\pi]$ car la fonction est paire.

Propriété 13.10. *La fonction* cos *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et sa dérivée est* $-\sin$ *:*

$$(\cos x)' = -\sin x$$

On l'admettra.

Tableau des variations

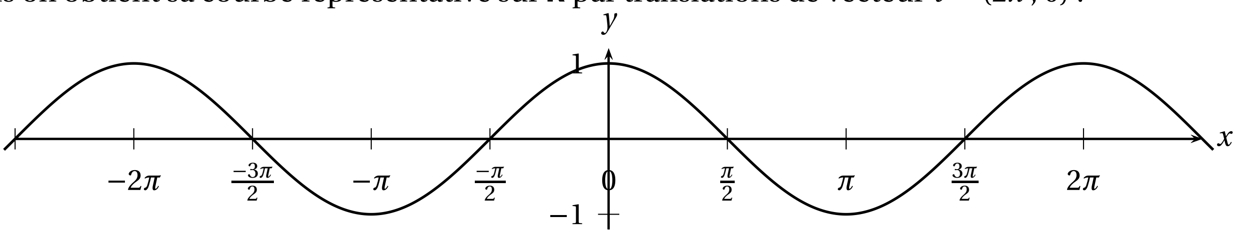
Cherchons le signe de sa dérivée c'est-à-dire le signe de $-\sin x$ sur $[0\,;\,\pi]$.
$\sin x = 0 = \sin 0$ donc cette équation a pour solution 0 et $\pi - 0 = \pi$ sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$. Le cercle trigonométrique nous permet d'obtenir que, sur cet intervalle, $\sin x \geqslant 0$ et donc que $-\sin x \leqslant 0$. La dérivée de la fonction cosinus est donc négative sur $[0\,;\,\pi]$, la fonction cosinus est donc décroissante sur cet intervalle.

x	0	π
$(\cos x)' = -\sin x$	$-$	
cos	1 ↘	-1

La fonction cosinus étant paire, par symétrie, elle est donc croissante sur $[-\pi\,;\,0]$ et par translation on obtient ses variations sur $\mathbb{R}$ qu'on peut lire sur sa courbe représentative ci-dessous.

Courbe représentative de la fonction cosinus

On trace précisément la courbe sur $[0\,;\,\pi]$, on en fait la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, puis on obtient sa courbe représentative sur $\mathbb{R}$ par translations de vecteur $\vec{v} = (2\pi\,;\,0)$:



13.3.3 Fonction sinus

Définition

Définition 13.10. On appelle *fonction sinus* la fonction qui à tout réel x associe son sinus.

$$x \longmapsto \sin x$$

Tout réel x ayant un sinus, la fonction sinus est définie sur $\mathbb{R}$.

Quelques propriétés

Les réels x et $-x$ sont associés par enroulement de la droite réelle sur le cercle trigonométrique à des points symétriques par rapport à l'axe des abscisses, qui ont donc des ordonnées opposées. Or ces ordonnées sont, par définition $\sin x$ et $\sin(-x)$ donc $\sin(-x) = -\sin(x)$. La fonction sinus est donc impaire.

Propriété 13.11. *La fonction sinus est impaire.*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin(-x) = -\sin x$$

Sa courbe représentative est donc symétrique par rapport à l'origine du repère.

Par enroulement de la droite réelle sur le cercle trigonométrique, les réels x, $x+2\pi$, $x+4\pi$, $\dots$, $x+k\times 2\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$ sont associés au même point. On a donc $\sin x = \sin(x+2\pi) = \sin(x+4\pi) = \dots = \sin(x+k\times 2\pi)$. La fonction sinus est donc périodique et on admettra que le plus petit nombre α tel que $\sin x = \sin(x+\alpha)$ est $\alpha = 2\pi$, donc que sa période est 2π.

Propriété 13.12. *La fonction sinus est périodique et de période* 2π.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin x = \sin(x+2\pi)$$

On étudie alors la fonction sinus sur un intervalle d'amplitude 2π, par exemple $[-\pi\,;\pi]$ puis on « translate » l'étude car la fonction est 2π-périodique. Et l'on peut même réduire à l'intervalle $[0\,;\pi]$ car la fonction est impaire.

Propriété 13.13. *La fonction* sin *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et sa dérivée est* cos *:*

$$(\sin x)' = \cos x$$

On l'admettra.

Tableau des variations

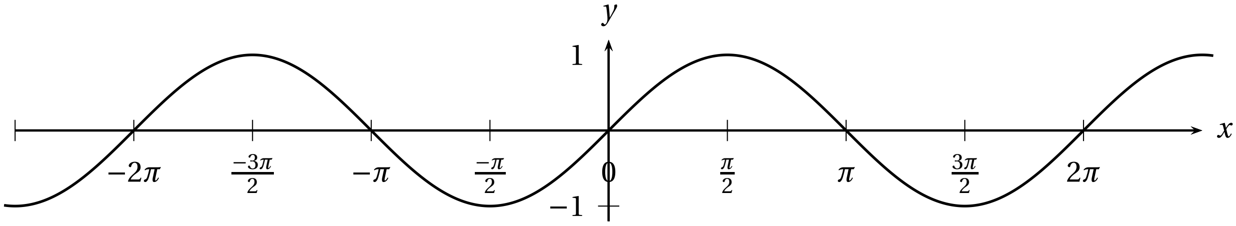
Cherchons le signe de sa dérivée c'est-à-dire le signe de $\cos x$ sur $[0\,;\pi]$.
$\cos x = 0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$ donc cette équation a pour unique solution $\frac{\pi}{2}$ sur l'intervalle $[0\,;\pi]$. Le cercle trigonométrique nous permet d'obtenir que, sur cet intervalle, $\cos x \geqslant 0$ quand $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et que $\cos x \leqslant 0$ quand $x \in \left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$(\sin x)' = \cos x$		$+$	0	$-$	
$\sin$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

La fonction sinus étant impaire, par symétrie, elle est donc décroissante sur $\left[-\pi\,;-\frac{\pi}{2}\right]$ et croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;0\right]$ et par translation on obtient ses variations sur $\mathbb{R}$ qu'on peut lire sur sa courbe représentative ci-dessous.

Courbe représentative de la fonction sinus

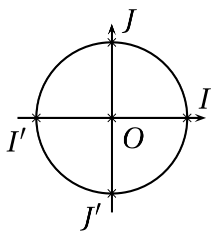
On trace précisément la courbe sur $[0\,;\pi]$, on en fait la symétrie par rapport à l'origine du repère, puis on obtient sa courbe représentative sur $\mathbb{R}$ par translations de vecteur $\vec{v} = (2\pi\,;0)$:



13.4 Exercices

13.4.1 Angles orientés

Dans tous les exercices le plan est muni d'un repère $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ orthonormé direct.
Sauf définition particulière propre à un exercice, les points I, J, I', J' sont les points tels que $\overrightarrow{OI} = -\overrightarrow{OI'} = \overrightarrow{\imath}$, $\overrightarrow{OJ} = -\overrightarrow{OJ'} = \overrightarrow{\jmath}$.



Exercice 13.2.
On considère les points A, B, C et D du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ associés, respectivement, aux réels $\frac{37\pi}{6}$, $\frac{29\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{5\pi}{12}$.

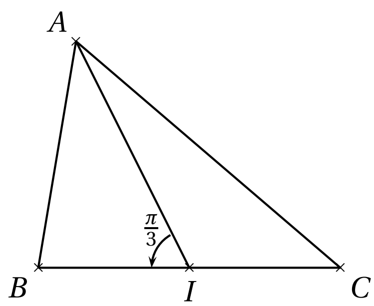
1. Déterminer les mesures principales des angles orientés $\left(\overrightarrow{\imath}\,;\overrightarrow{OA}\right)$ et $\left(\overrightarrow{\imath}\,;\overrightarrow{OB}\right)$.
2. Démontrer que $(OA)\perp(OC)$.
3. Déterminer les mesures principales des angles orientés $\left(\overrightarrow{OD};\overrightarrow{OA}\right)$ et $\left(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}\right)$.
4. Préciser une mesure en degré de l'angle $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OD}\right)$

Exercice 13.3.
Sur un cercle trigonométrique $\mathscr{C}$, on considère les points A et B tels que $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}\right) = \frac{5\pi}{6}$ et $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}\right) = -\frac{2\pi}{3}$.
Déterminer la mesure principale des angles suivants :

1. $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OJ'}\right)$;
2. $\left(\overrightarrow{OJ};\overrightarrow{OB}\right)$;
3. $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right)$;
4. $\left(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{OB}\right)$;
5. $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{BO}\right)$;
6. $\left(\overrightarrow{AO};\overrightarrow{BO}\right)$;
7. $\left(2\overrightarrow{OA};-3\overrightarrow{OB}\right)$.

Exercice 13.4.
ABC est un triangle et I est le milieu de $[BC]$. On sait que $\left(\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB}\right) = \frac{\pi}{3}$.
Déterminer la mesure principale des angles orientés suivants (on justifiera par le calcul et on ne s'autorisera pas les lectures graphiques) :

1. $\left(\overrightarrow{AI};\overrightarrow{IB}\right)$;
2. $\left(\overrightarrow{AI};\overrightarrow{IC}\right)$;
3. $\left(\overrightarrow{IA};\overrightarrow{CB}\right)$.



13.4.2 Trigonométrie

On donne sur la figure 13.3 page 140 des cercles trigonométriques qui peuvent être utilisés à loisir.

EXERCICE 13.5.
Après avoir placé les points du cercle trigonométrique correspondant aux nombres réels suivants, déduire graphiquement les valeurs exactes de leurs cosinus et sinus :

- $\frac{17\pi}{4}$
- $\frac{14\pi}{3}$
- $\frac{19\pi}{6}$
- $-\frac{21\pi}{2}$

EXERCICE 13.6.
En vous aidant éventuellement du cercle trigonométrique, compléter les tableaux suivants avec les valeurs exactes :

x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{-8\pi}{3}$	$\frac{17\pi}{3}$	$\frac{-28\pi}{3}$
$\cos(x)$							
$\sin(x)$							

x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{-11\pi}{4}$	$\frac{19\pi}{4}$	$\frac{31\pi}{4}$
$\cos(x)$							
$\sin(x)$							

EXERCICE 13.7.
Déterminer les valeurs exactes de $\sin\left(\frac{31\pi}{6}\right)$ et $\cos\left(\frac{31\pi}{6}\right)$.

EXERCICE 13.8.
On donne $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.
Déterminer les valeurs exactes de $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

EXERCICE 13.9.
Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$B = \sin(\pi + x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin(-x)$$

$$C = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$D = \sin(\pi + x) + \cos(\pi + x) - \sin(-x)$$

$$E = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos(-x)$$

EXERCICE 13.10.
Calculer, sans utiliser la calculatrice :

$$A = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)$$

$$B = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

$$C = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$D = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos(\pi) + \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$E = \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$F = \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$G = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 1$$

Exercice 13.11.
Résoudre les équations suivantes :

1. Dans $\mathbb{R}$: $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
2. Dans $]-2\pi\,;2\pi]$: $\sin(x) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$;
3. Dans $]-\pi\,;\pi]$: $\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$;
4. Dans $\mathbb{R}$: $\sin(x) = 0$;
5. Dans $\mathbb{R}$: $\cos(x) = 0$;
6. Dans $\mathbb{R}$: $\cos(x) = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$;
7. Dans $\mathbb{R}$: $\cos(x) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$;
8. Dans $\mathbb{R}$: $\sin(x) = \frac{1}{2}$;
9. Dans $\mathbb{R}$: $\sin(x) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$;
10. Dans $]-\pi\,;\pi]$: $(\sin(x)+1)(\cos(x)-1) = 0$;
11. Dans $]-\pi\,;\pi]$: $\cos^2(x) = 1$;
12. Dans $[0\,;2\pi]$: $2\sin^2(x)+\sin(x)-1 = 0$;
13. Dans $]-\pi\,;\pi]$: $4\cos^2(x)-3 = 0$;
14. Dans $]-\pi\,;\pi]$: $\sin^2(x)-\sin(x) = 0$.

Exercice 13.12.
Résoudre les inéquations suivantes :

1. Dans $]-\pi\,;\pi]$: $\sqrt{2}\cos(x) \leqslant 1$;
2. Dans $]0\,;2\pi]$: $2\cos(x)+1 \geqslant 0$;
3. Dans $]-\pi\,;\pi]$: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin x\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin x\right) \geqslant 0$;
4. Dans $]-\pi\,;\pi]$: $1-2\sin^2 x \geqslant 0$;
5. Dans $]0\,;2\pi]$: $\sin(x)\times\cos(x) \leqslant 0$;

13.4.3 Fonctions trigonométriques

Exercice 13.13.
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g : x \longmapsto \cos(x)\times\sin(x)$.

1. Montrer que g est impaire.
2. Montrer que g est périodique de période π.
3. Déduire des points précédents un intervalle I d'amplitude π suffisant pour étudier g.
4. Étudier les variations de g sur I.
5. Tracer sa courbe représentative sur $[-\pi\,;\pi]$.

Exercice 13.14.
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g : x \longmapsto \cos(x)+\sin(x)$.

1. Montrer que g n'est ni paire, ni impaire.
2. Montrer que g est périodique de période 2π.
3. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $-2 \leqslant g(x) \leqslant 2$.
4. Tracer sa courbe représentative sur $[-2\pi\,;2\pi]$.

Exercice 13.15.
On considère la fonction tangente, notée tan, définie par $\tan : x \longmapsto \frac{\sin x}{\cos x}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction tangente.
2. Étudier sa parité.
3. Montrer qu'elle est périodique de période π
4. En déduire un intervalle le plus petit possible pour étudier cette fonction puis, sur cet intervalle, étudier ses variations.
5. Tracer sa représentation graphique sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{3\pi}{3}\right[$.

EXERCICE 13.16.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \longmapsto \frac{\sin x}{2+\cos x}$$

1. Montrer que f est impaire et 2π-périodique.
   En déduire un intervalle I d'amplitude π pour étudier la fonction f.
2. Montrer que $f'(x) = \frac{2\cos(x)+1}{(2+\cos x)^2}$.
3. En déduire les variations de f sur I.
4. Tracer la courbe représentative de f sur $[0\,;2\pi]$.

EXERCICE 13.17.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \longmapsto \frac{\cos x}{3+\sin^2 x}$$

1. Montrer que f est paire et 2π-périodique.
   En déduire un intervalle I d'amplitude π pour étudier la fonction f.
2. Montrer que $f'(x) = \frac{\sin(x)(\sin^2(x)-5)}{(3+\sin^2 x)^2}$.
3. En déduire les variations de f sur I.
4. Tracer la courbe représentative de f sur $[-\pi\,;3\pi]$.

EXERCICE 13.18.
Soit trois fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par : $f : x \longmapsto \sin(2x)$, $g : x \longmapsto 2\sin x$ et $h : x \longmapsto \sin^2 x$.

1. Étudier la parité de chacune de ces fonctions.
2. (a) Montrer que f est périodique de période π.
   (b) Étudier la périodicité de g et de h.
3. Étudier les variations de chacune de ces fonctions sur un intervalle le plus petit possible.
4. Les courbes de f, g et h sont représentées sur la figure ci-dessous. Associer chaque courbe à sa fonction.

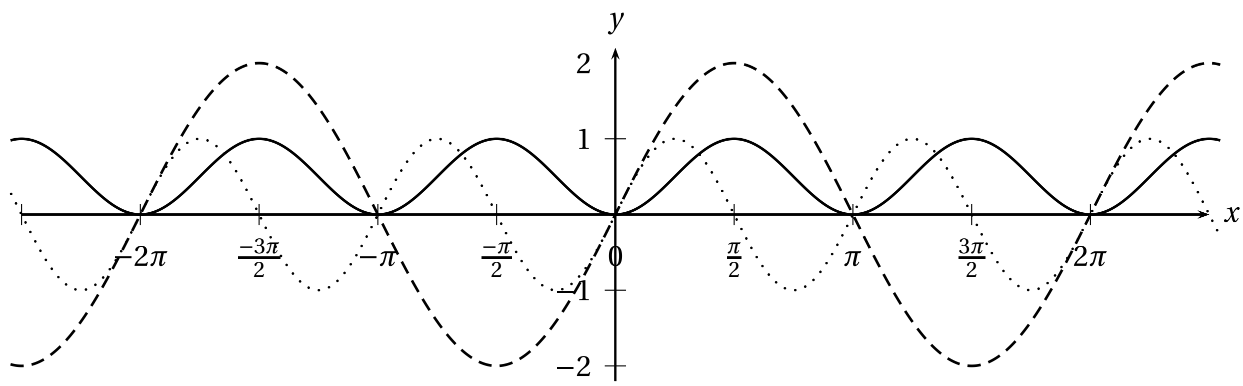


FIGURE 13.3: Cercles trigonométriques