Chapitre 11

Une application du produit scalaire : Équations cartésiennes de droite et de cercle

Sommaire

Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un repère **orthonormal**.

11.1 Équations cartésiennes de droites

Le produit scalaire nous permet d'obtenir d'une autre manière une équation cartésienne de droite.

Définition 11.1. Le plan est muni d'un repère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$. On appelle vecteur normal à une droite $\mathscr{D}$ tout vecteur $\vec{n}$ non nul orthogonal à un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

Théorème 11.1. *Le plan est muni d'un répère $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ **orthonormal**. Soit $\vec{n}(a\,;\,b)$ un vecteur non nul. Alors :*

- *Toute droite de vecteur normal $\vec{n}$ admet une équation de la forme $ax+by+c=0$.*
- *Toute droite admettant une équation de la forme $ax+by+c=0$ admet $\vec{n}=(a\,;\,b)$ comme vecteur normal.*

Preuve. Démontrons ces deux points :

- Soit une droite $\mathscr{D}$ de vecteur normal $\vec{n}\,(a\,;\,b)$ et $A\,(x_A\,;\,y_A)$ un point de cette droite.
  $M\,(x\,;\,y)\in\mathscr{D}\Leftrightarrow\vec{n}\,(a\,;\,b)=(X\,;\,Y)$ et $\overrightarrow{AM}\,(x-x_A\,;\,y-y_A)=(X'\,;\,Y')$ orthogonaux $\Leftrightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow XX'+YY'=0\Leftrightarrow a(x-x_A)+b(y-y_A)=0\Leftrightarrow ax+by-ax_A-by_A=0$. En posant $c=-ax_A-by_A$, on obtient une équation cartésienne de $\mathscr{D}$: $ax+by+c=0$.
- Soit une droite $\mathscr{D}$ ayant comme équation cartésienne $ax+by+c=0$ et $\vec{n}=(a\,;\,b)$. On a vu qu'alors un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ était $\vec{v}\,(-b\,;\,a)$.
  À l'aide du produit scalaire, montrons que ces deux vecteurs sont orthogonaux.
  $\vec{n}=(a\,;\,b)=(X\,;\,Y)$ et $\vec{v}\,(-b\,;\,a)=(X'\,;\,Y')$.
  $\vec{n}.\vec{v}=XX'+YY'=a\times(-b)+b\times a=-ab+ab=0$.

◊

Propriété 11.2 (Distance d'un point à une droite)**.** *Le plan est muni d'un repère* $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ***orthonormal****.*
Soit $\mathscr{D} : ax + by + c = 0$ *une droite et* $M(\alpha\,;\,\beta)$ *un point quelconque du plan.*
La distance de M *à* $\mathscr{D}$*, notée* $d(M,\mathscr{D})$ *est*

$$d(M,\mathscr{D}) = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

On l'admettra.

11.2 Équations cartésiennes de cercle

Le produit scalaire nous permet d'obtenir un autre type d'équation cartésienne de cercle.

Théorème 11.3. *Le plan est muni d'un repère* $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ ***orthonormal****.*
Soit $A(x_a\,;\,y_a)$ *et* $B(x_b\,;\,y_b)$ *et* $\mathscr{C}$ *le cercle de diamètre* $[AB]$.
Alors tout point M *de* $\mathscr{C}$ *a ses coordonnées qui vérifient* $(x - x_a)(x - x_b) + (y - y_a)(y - y_b) = 0$.

Preuve. On a vu au collège que M est sur le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$ si et seulement si le triangle ABM est rectangle en M. Donc :
$M(x\,;\,y) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\,(x-x_a\,;\,y-y_a) = (X\,;\,Y)$ et $\overrightarrow{BM}\,(x-x_b\,;\,y-y_b) = (X'\,;\,Y')$ orthogonaux $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow XX' + YY' = 0 \Leftrightarrow (x - x_a)(x - x_b) + (y - y_a)(y - y_b) = 0$. ◊

11.3 Exercices

EXERCICE 11.1.
On donne $A(1\,;2)$, $B(2\,;1)$ et $C(-3\,;0)$. Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ passant par C et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.

EXERCICE 11.2.
Déterminer l'équation du cercle de centre $\Omega(5\,;1)$ et tangent à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x + y - 4 = 0$.

EXERCICE 11.3.
On considère un triangle ABC avec $A(-1\,;2)$, $B(3\,;1)$ et $C(2\,;4)$.

1. Déterminer une équation de la médiatrice du segment $[AB]$.
2. Déterminer une équation de la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

EXERCICE 11.4.
On donne $\Omega(2\,;-3)$.

1. Déterminer l'équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω et de rayon $r = 5$.
2. Démontrer que le point $A(-2\,;0)$ est un point du cercle $\mathscr{C}$.
3. Déterminer une équation cartésienne de la tangente en A au cercle $\mathscr{C}$.

EXERCICE 11.5.
Soit $A(3\,;5)$. Chercher une équation de la tangente en A au cercle $\mathscr{C}$ de centre O, origine du repère, et passant par A.

EXERCICE 11.6.
Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan dont les coordonnées $(x\,;\,y)$ vérifient : $(x-3)(x+2) + (y-1)(y-4) = 0$.