Chapitre 10

Variables aléatoires

Sommaire

10.1 Deux exemples

On illustrera toutes les notions avec les situations suivantes :

1. on tourne une roue dans une fête foraine qui est partagée en 8 secteurs égaux : 1 de couleur rouge, 3 de couleur verte et 4 de couleur bleue ;
2. on lance deux dés et on s'intéresse à la somme des deux dés.

10.2 Définition

Définition 10.1. Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire.

- On appelle *variable aléatoire* toute fonction X de Ω dans $\mathbb{R}$ qui, à tout élément de Ω, fait correspondre un nombre réel k.
- L'évènement noté $\{X = k\}$ est l'ensemble des éléments de Ω qui ont pour image k par X.
- L'ensemble image de Ω par X est l'ensemble de toutes les images des éléments de Ω par X. Cet ensemble est noté Ω'.

Avec nos situations de départ on peut imaginer les variables aléatoires suivantes :

1. La partie de roue à la fête foraine coûte 1 € et l'on gagne :
   - 0 € si le bleu sort ;
   - 2 € si le vert sort ;
   - 5 € si le rouge sort ;

   Lorsqu'on lance la roue, l'univers est donc $\Omega = \{\text{bleu} ; \text{vert} ; \text{rouge}\}$ et l'on peut définir la variable aléatoire qui à chaque couleur associe le gain engendré.

   Ainsi, en enlevant la mise (1 € pour pouvoir jouer), on a :

- X : bleu $\mapsto -1$
- X : vert $\mapsto 1$
- X : rouge $\mapsto 4$

2. On peut, par exemple, définir une variable aléatoire X de la façon suivante :
   - $X = 0$ si la somme des deux dés est paire ;
   - $X = 1$ si elle est impaire.

   L'ensemble image de Ω par X est $\Omega' = \{0\,;\,1\}$

Remarques.

- Une variable aléatoire n'est pas un nombre, mais une fonction.
- Les valeurs d'une variable aléatoire sont toujours des nombres.
- En général, une variable aléatoire est notée X, Y, Z.

10.3 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition 10.2. Soit $\Omega = \{\omega_1\,;\,\omega_2\,;\cdots;\,\omega_n\}$ un univers associé à une expérience aléatoire sur lequel a été définie une loi de probabilité et $\Omega' = \{x_1\,;\,x_2\,;\cdots;\,x_n\}$ l'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X.
La loi de probabilité de X est la fonction définie sur Ω', qui à chaque x_i fait correspondre le nombre $p'_i = p(X = x_i)$.

On démontre facilement que $\sum\limits_i p'_i = 1$.

En reprenant les deux situations de départ, on a :

1. Dans le cas de la roue on a :

x_i	-1	1	4
$p(X = x_i)$	$\frac{4}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

2. $p(X = 0)$ est la probabilité que la variable aléatoire soit égale à 0, c'est-à-dire que la somme soit paire.
   On a ainsi $p(X = 0) = p(2) + p(4) + p(6) + \cdots + p(12) = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$. De même $p(X = 1) = \frac{1}{2}$.

x_i	0	1
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

10.4 Espérance, variance, écart type

Définition 10.3. L'espérance mathématique, la variance et l'écart type de la variable aléatoire X, dont les notations respectives sont $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ sont respectivement les nombres :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i w_i \qquad V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i\,(\omega_i - E(X))^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \omega_i^2\right) - (E(X))^2 \qquad \sigma(X) = \sqrt{V}$$

Toujours avec les exemples de la situation de départ :

1. (X est le gain à la roue de la fête foraine)
   - $E(X) = \frac{4}{8} \times (-1) + \frac{3}{8} \times 1 + \frac{1}{8} \times 4 = \frac{3}{8}$
     (le gain qu'on peut espérer à chaque partie est en moyenne de 0,375 €)
   - $V(X) = \frac{4}{8} \times (-1)^2 + \frac{3}{8} \times 1^2 + \frac{1}{8} \times 4^2 - \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{175}{64}$
   - $\sigma(X) = \sqrt{\frac{175}{64}} \approx 1{,}654$

2. ($X = 0$ si la somme des dés est paire, $X = 1$ si elle est impaire)

   - $E(X) = \sum_i p'_i x_i = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$
   - $V(X) = \sum_i p'_i x_i^2 - (E(X))^2 = \frac{1}{2} \times 0^2 + \frac{1}{2} \times 1^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$
   - $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{1}{2}$

Propriété 10.1. *Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire sur lequel a été définie une variable aléatoire X d'espérance $E(X)$ et de variance $V(x)$.*
Soit Y une nouvelle variable aléatoire telle que $Y = aX + b$ où a et b sont des réels quelconque.
Alors $E(Y) = aE(X) + b$ et $V(Y) = a^2 V(X)$.

La preuve sera faite en classe.

Avec les exemples de la situation de départ :

1. Si, par exemple, la partie coûte quatre euros au lieu d'un, on obtient une variable aléatoire $Y = 1X - 3$. $E(Y) = 1E(X) - 3 = -2{,}625$ et $V(Y) = 1^2 V(X) = V(X)$.
2. Si, par exemple, on définit la variable aléatoire $Y = 2X$, $E(Y) = 2E(X) = 1$ et $V(Y) = 2^2 V(X) = 4V(X) = 1$.

10.5 Exercices

EXERCICE 10.1.
On jette trois fois de suite une pièce de monnaie équilibrée et on appelle « tirage »le résultat obtenu. Ainsi (Face; Face; Pile) est un tirage (qu'on notera FFP).

1. Faire un arbre décrivant l'ensemble des issues possibles de cette expérience aléatoire et donner le cardinal de Ω, l'univers des possibles.
2. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de « Pile »obtenues.
   (a) Décrire Ω', l'univers des possibles pour X.
   (b) Déterminer la loi de probabilité associée à X (on la présentera sous forme de tableau).
   (c) Déterminer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$ respectivement l'espérance, la variance et l'écart type de X.

EXERCICE 10.2.
Pour se rendre à son travail, un automobiliste rencontre trois feux tricolores. On suppose que les feux fonctionnent de manière indépendante, que l'automobiliste s'arrête s'il voit le feu orange ou rouge et qu'il passe si le feu est vert. On suppose de plus que chaque feu est vert durant les deux tiers du temps et rouge ou orange un tiers du temps. On dit que l'automobiliste a obtenu le feu au vert quand il est passé sans s'arrêter.

1. Faire un arbre représentant toutes les situations possibles.
2. Quelle est la probabilité que l'automobiliste ait les trois feux verts? deux des trois feux verts?
3. Combien de feux au vert l'automobiliste peut-il espérer?

EXERCICE 10.3.
Un dé (à 6 faces) est truqué de la façon suivante : chaque chiffre pair a deux fois plus de chance de sortir qu'un numéro impair.

1. Calculer la probabilité d'obtenir un 6.
2. On lance deux fois le dé.
   (a) Calculer la probabilité d'obtenir deux fois un chiffre pair.
   (b) Calculer la probabilité d'obtenir deux fois un 6.
   (c) On appelle X la variable aléatoire qui a chaque tirage associe la

somme des deux dés.
Calculer l'espérance de X. Comment interpréter ce nombre ?

EXERCICE 10.4.
On lance deux dés équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
L'ensemble E des couples $(x\,;\,y)$, avec $1 \leqslant x \leqslant 6$ et $1 \leqslant y \leqslant 6$, est associé à une loi de probabilité équirépartie.
À chaque couple $(x\,;\,y)$, on associe $|x-y|$. On définit ainsi une variable aléatoire X sur l'ensemble E.

1. Définir la loi de probabilité de X.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.

EXERCICE 10.5.
On considère une roue partagée en 15 secteurs égaux tels que :

- il y a un secteur de couleur rouge (R)
- il y a cinq secteurs de couleur bleue (B)
- il y a neuf secteurs de couleur verte (V)

La roue tourne sur son axe central et s'arrête sur l'une des couleurs, chaque secteur ayant la même probabilité.
Pour pouvoir faire tourner la roue, un joueur doit payer 1 € et, selon la couleur sur laquelle elle s'arrête, il gagne :

- 0 € si le vert sort ;
- 1 € si le bleu sort ;
- x € si le rouge sort ;

On appelle X la variable aléatoire associée au gain final (gain − mise de départ) du joueur.

1. Décrire l'univers $X(\Omega)$ associé à X.
2. Décrire la loi de probabilité associée à X (on la présentera sous forme de tableau).
3. Exprimer en fonction de x l'espérance de gain du joueur.
4. On suppose que $x = 2$ € .
   (a) Quelle est l'espérance de gain du joueur ?
   (b) Qui est le plus avantagé : l'organisateur du jeu ou le joueur ?
5. Mêmes questions pour $x = 15$ € .
6. On dit que le jeu est équitable lorsque l'espérance de gain est égale à zéro, car alors ni l'organisateur du jeu ni le joueur ne sont avantagés. Combien doit valoir x pour que le jeu soit équitable ?

EXERCICE 10.6.
On considère le jeu suivant : Le joueur lance deux dés à six faces ; s'il fait un double 6, il gagne un million d'euros, sinon il perd dix mille euros.
Faut-il lui conseiller le jeu ?

EXERCICE 10.7.
On dispose d'une roue qui comporte dix secteurs identiques, neuf verts et un rouge.
On propose les deux jeux suivants :

Jeu 1 : si la roue s'arrête sur un secteur vert, le joueur gagne 2 000 euros, sinon il perd 8 000 euros.

Jeu 2 : si la roue s'arrête sur un secteur vert, le joueur ne gagne ni ne perd rien, sinon, il gagne 10 000 euros.

1. Intuitivement, quel jeu semble le plus avantageux ?
2. Calculer, pour chaque jeu, l'espérance et la variance de gain du joueur. Que constate-t-on ?

EXERCICE 10.8.
Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$, notée aussi m, et d'écart-type $\sigma(X)$, noté σ.
Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = \frac{X-m}{\sigma}$.
Déterminer $E(Y)$ et $\sigma(Y)$.

EXERCICE 10.9.
On jette un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On définit une variable alétoire X en associant à chaque tirage le nombre :

- -10 si on tire le numéro 1 ;
- 10 si on tire le numéro 6 ;
- 0 dans tous les autres cas.

1. Définir l'univers Ω associé à l'expérience aléatoire et l'univers Ω' associé à la variable alétoire.
2. On suppose que le dé est parfaitement équilibré. Donner la loi de probabilité de X, son espérance et son écart-type
3. Même question avec la variable Y qui associe à chaque tirage le nombre :
   - -5 si on tire le numéro 1 ;
   - 5 si on tire le numéro 6 ;
   - 0 dans tous les autres cas.

EXERCICE 10.10.
On lance n dés ($n \geqslant 1$). On note A l'évènement « obtenir au moins un 6 ».

1. Décrire $\overline{A}$.
2. Exprimer en fonction de n la probabilité $p(\overline{A})$.
3. En déduire que $p(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.
4. Compléter le tableau suivant :

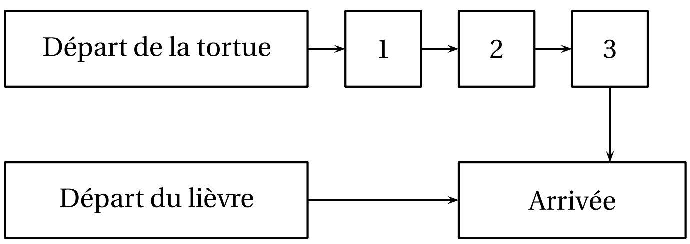
n	1	2	3	4	5	6	7	8
$p(A)$								

5. Combien de dés faut-il lancer pour que la probabilité d'obtenir au moins un six soit supérieure à $\frac{3}{4}$?
6. Le lièvre et la tortue font la course.

   Le lièvre se divertit longuement mais quand il part, il file à l'arrivée. La tortue, quant à elle, avance inexorablement mais lentement vers l'arrivée.

   On considère qu'on peut assimiler cette course au lancement d'un dé :

   - si le 6 sort, le lièvre avance ;
   - sinon la tortue avance d'une case et au bout de 4 cases la tortue a gagné.
     Voir figure ci-dessous.



   (a) Déterminer la probabilité que le lièvre l'emporte et celle que la tortue l'emporte.

   (b) En combien de lancers de dés peut-on espérer finir la partie en moyenne ?