Chapitre 2

Vecteurs

Sommaire

Ce chapitre est constitué d'une part de rappels de Seconde (les exemples y seront donc limités et les propriétés ne seront pas re-démontrées) et d'autre part d'exercices de géométrie vectorielle non analytique. Son objectif est de continuer à se familiariser avec la notion de vecteur.

2.1 Rappels

2.1.1 Translations et vecteurs

Définition 2.1 (Translation)**.** Soit A et B deux points du plan.
On appelle *translation qui transforme A en B* la transformation qui à tout point M du plan associe l'unique point M' tel que $[AM']$ et $[BM]$ ont même milieu.

Remarque. $ABM'M$ est alors un parallélogramme.

Définition 2.2 (Vecteur)**.** On appelle *vecteur $\overrightarrow{AB}$* le bipoint associé à la translation qui transforme A en B.
A est appelé *origine du vecteur*, B est appelé *extrémité du vecteur*.
La translation qui transforme A en B sera appelée *translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$*.

Définition 2.3 (Vecteurs égaux et parallélogramme)**.** Deux vecteurs sont dits *égaux* s'ils sont associés à une même translation, ce qui revient à :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ABDC \text{ parallélogramme}$$

Remarque. Attention à l'ordre des lettres !

On peut aussi définir un vecteur de la manière suivante :

Définition 2.4 (Direction, sens et norme)**.** Un vecteur $\vec{u}$ non nul est déterminé par :

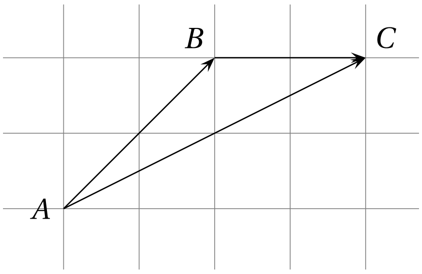
- sa *direction* ;
- son *sens* ;
- et sa longueur, appelée *norme du vecteur*, notée $\|\vec{u}\|$.

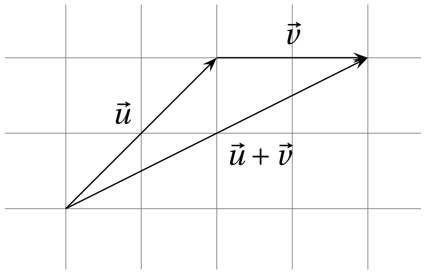
On a alors :
Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont la même direction, le même sens et la même norme.

2.1.2 Somme de vecteurs

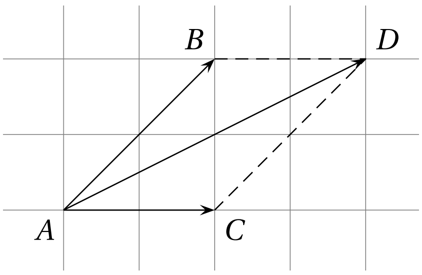
Définition 2.5 (Somme de deux vecteurs)**.** La somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur associé à la translation résultat de l'enchaînement, on dit aussi la *composition*, des translations de vecteur $\vec{u}$ et de vecteur $\vec{v}$.

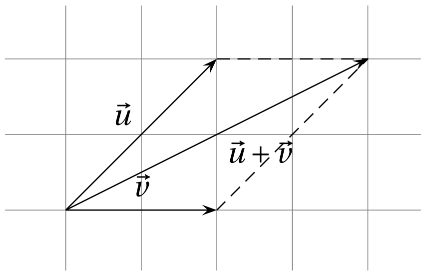
Propriété 2.1 (Relation de CHASLES)**.** *Pour tous points A, B et C, on a :* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$





Propriété 2.2 (Règle du parallélogramme)**.** *Pour tous points A, B, C et D on a :* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow ABDC$ *parallélogramme.*





Définition 2.6 (Vecteur nul, vecteurs opposés)**.** On appelle *vecteur nul*, noté $\vec{0}$, tout vecteur dont son origine et son extrémité sont confondues. La translation associée laisse tous les points invariants.
On appelle *vecteurs opposés* tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que $\vec{u}+\vec{v}=\vec{0}$. On peut noter $\vec{u}=-\vec{v}$ ou $\vec{v}=-\vec{u}$.

Remarque. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont des vecteurs opposés car $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{0}$.
On a donc $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$.

Propriété 2.3 (Milieu d'un segment)**.** *Soit A et B deux points distincts et I un point du plan. Alors :*
I milieu de $[AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}=\overrightarrow{BI}$.

2.1.3 Produit d'un vecteur par un réel

Définition 2.7 (Produit d'un vecteur par un réel)**.** Soit k un réel non nul et $\vec{u}$ un vecteur non nul. Alors le vecteur $k\vec{u}$ est un vecteur dont :

- la direction est celle de $\vec{u}$
- le sens est celui de $\vec{u}$ si $k > 0$, le sens opposé de celui de $\vec{u}$ si $k < 0$
- la norme est $|k| \times \|\vec{u}\|$

Propriété 2.4 (Distributivité)**.** *Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tous nombres réels k et k' :*
$k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$ *et* $k\vec{u} + k'\vec{u} = (k+k')\vec{u}$.

Propriété 2.5 (Vecteur nul et produit par un réel)**.** *Pour tout vecteur $\vec{u}$ et pour tout nombre k,* $0\vec{u} = \vec{0}$ *et* $k\vec{0} = \vec{0}$.

Propriété 2.6 (Milieu et produit par un réel)**.** *Soit A et B deux points distincts et I un point du plan, alors :*
I milieu de $[AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

2.1.4 Colinéarité

Définition 2.8 (Colinéarité)**.** Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits *colinéaires* s'il existe un nombre k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$.

Remarque. Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur $\vec{u}$ car $0\vec{u} = \vec{0}$.

Propriété 2.7 (Colinéarité, alignement et parallélisme)**.** *Soit A, B, C et D quatre points du plan. Alors*

$$(AB) \parallel (CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ colinéaires}$$

$$A,B,C \text{ alignés} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ colinéaires}$$

2.2 Exercices

La plupart des exercices peuvent se faire sans utiliser de vecteur, cependant on devra essayer de passer systématiquement par les vecteurs.

EXERCICE 2.1.
Bien souvent dans les exercices de géométrie vectorielle, il est plus facile de démontrer des propriétés quand les vecteurs sont exprimés en fonction d'un ou deux vecteurs dits de base*, aussi est-il nécessaire d'acquérir une compétence technique permettant d'exprimer chaque vecteur en fonction de deux vecteurs imposés (ici) ou choisis.*

Écrire les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{x}$ et $\vec{t}$ en fonction des seuls vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

- $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$.
- $\vec{w} = \frac{2}{5}\left(\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{CA}$.
- $\vec{x} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.
- $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{BC}$.
- $\vec{t} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$.

EXERCICE 2.2.
$ABCD$ est un quadrilatère quelconque. I, J, K et L sont les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

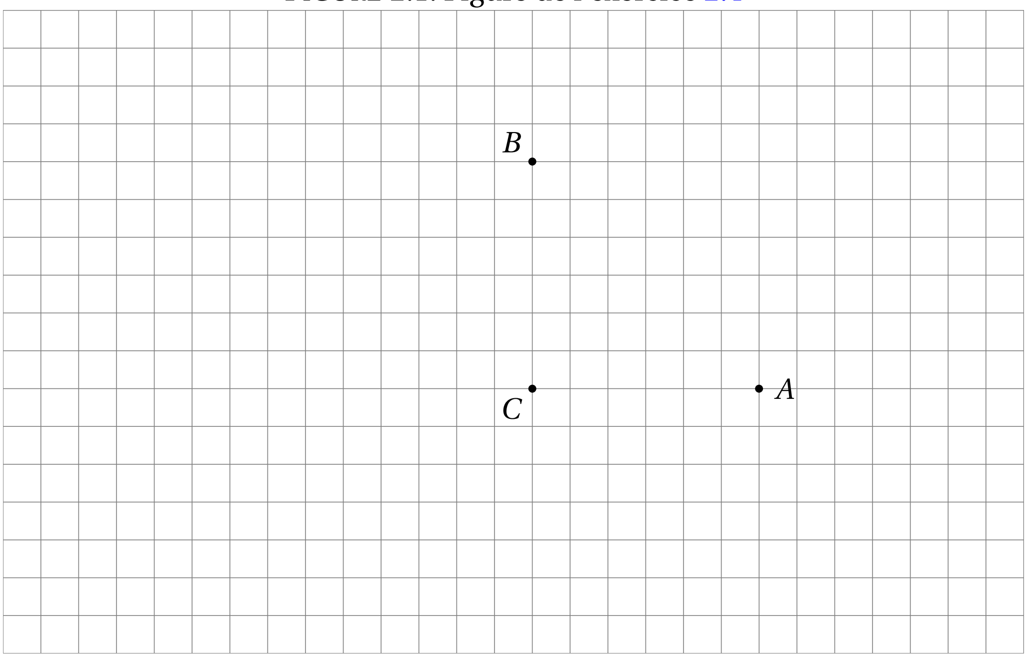
1. Montrer l'égalité vectorielle $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{LK}$.
2. Que peut-on en déduire au sujet du quadrilatère $IJKL$?

EXERCICE 2.3.
Soit $ABCD$ un parallélogramme et les points E et F tels que $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DF} = \frac{3}{5}\overrightarrow{DC}$.
Montrer que les segments $[EF]$ et $[BD]$ ont même milieu. *Aucune lecture graphique n'est autorisée.*

EXERCICE 2.4.
Soit un triangle rectangle ABC en C tel que $AC = 3$ cm et $BC = 3$ cm (voir la figure 2.1 de la présente page).

1. Placer les points I, J, K et L définis par les égalités suivantes :
   - $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$;
   - $\overrightarrow{CK} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$;
   - $\overrightarrow{BJ} = 2\overrightarrow{BA}$;
   - $\overrightarrow{CL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} - \frac{13}{6}\overrightarrow{BA}$.
2. Tracer le quadrilatère $IJKL$. Que peut-on conjecturer sur sa nature ?
3. Nous allons démontrer la conjecture faite au point précédent.
   (a) À l'aide de la relation de CHASLES, exprimer $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$.
   (b) À l'aide de la relation de CHASLES, exprimer $\overrightarrow{LK}$ en fonction de $\overrightarrow{CK}$ et $\overrightarrow{CL}$ puis en fonction de $\overrightarrow{AB}$.
   (c) Conclure.

FIGURE 2.1: Figure de l'exercice 2.4



EXERCICE 2.5.
Soit A, B et C trois points non alignés. Construire les points M, N et P tels que :

- $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=\vec{0}$
- $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{BC}$

EXERCICE 2.6.
$ABCD$ est un parallélogramme. Les points M, N, P et Q sont tels que :

- $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{BN}=2\overrightarrow{BC}$
- $\overrightarrow{CP}=2\overrightarrow{CD}$
- $\overrightarrow{DQ}=2\overrightarrow{DA}$

Montrer que le quadrilatère $MNPQ$ est un parallélogramme.

EXERCICE 2.7.
$ABCD$ est un parallélogramme.

1. Construire les points F et E tels que : $\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{AD}$.
2. Construire le point G tel que $AEGF$ parallélogramme.
3. Démontrer que les points A, C et G sont alignés.

EXERCICE 2.8.
Soit ABC un triangle non aplati (A, B et C non alignés) et les points D et E tels que :

$$\overrightarrow{AD}=\frac{5}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{CB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$$

1. Faire un dessin. Conjecturer le lien entre les points B, D et E.
2. Nous allons démontrer la conjecture du point précédent.
   (a) Exprimer $\overrightarrow{ED}$ en fonction des seuls vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   (b) Exprimer $\overrightarrow{BD}$ en fonction des seuls vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   (c) Conclure.

EXERCICE 2.9.
Montrer que si le quadrilatère $ABCD$ admet des diagonales qui se coupent en I, leur milieu, alors $ABCD$ est un parallélogramme.

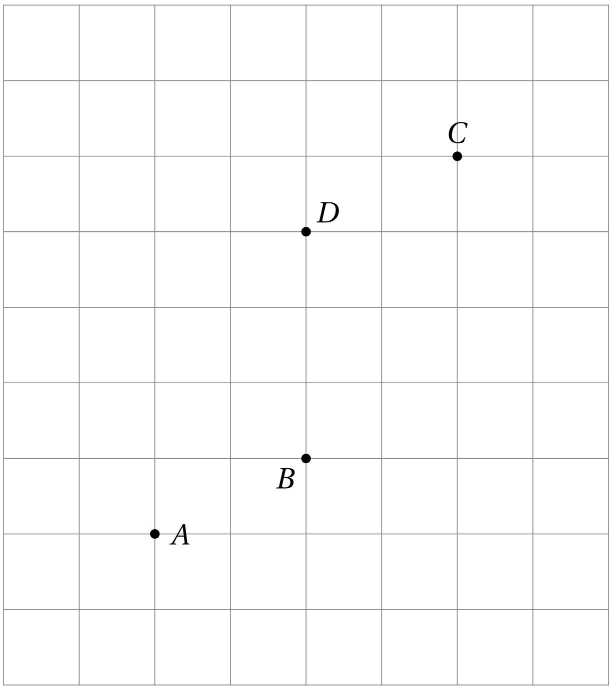
EXERCICE 2.10.
Soit cinq points O, A, B, C et D tels que : $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$.
Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

EXERCICE 2.11.
$ABCD$ est un parallélogramme. I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AD]$. K est l'intersection des droites (DI) et (BJ).
Que peut-on dire des points A, K et C ?

EXERCICE 2.12.

Sur la figure ci-dessous, $ABCD$ est un parallélogramme.

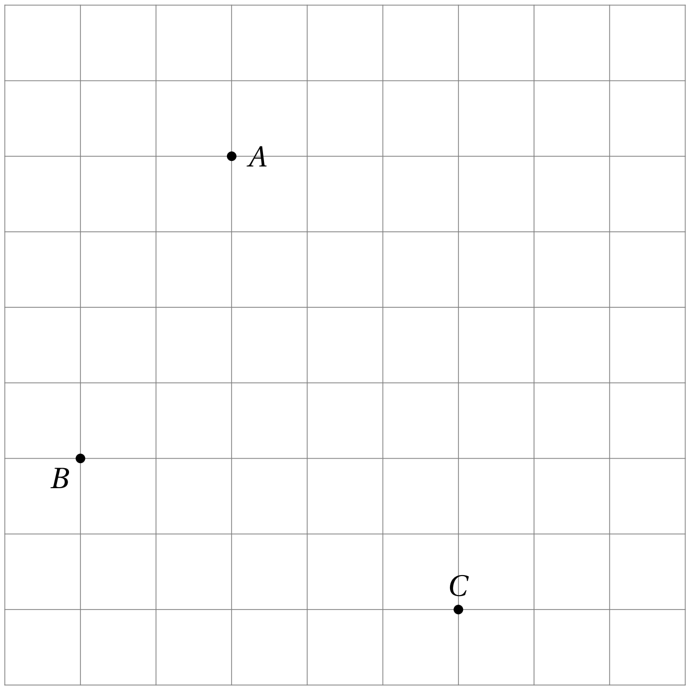
A' est le symétrique de A par rapport à B et E est le milieu de $[BC]$.



1. Construire A' et E.
2. Exprimer $\overrightarrow{DE}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3. Exprimer $\overrightarrow{DA'}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
4. Conclure.

EXERCICE 2.13.

Sur la figure ci-dessous, ABC est un triangle quelconque. On définit trois points D, E et F par : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. On appelle, par ailleurs, I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$.



1. Construire D, E, F, I et J.
2. Montrer que les droites (DE) et (BF) sont parallèles.
3. Montrer que les points I, E et D sont alignés.
4. Montrer que les points B, F et J sont alignés.