Chapitre 4

Équations cartésiennes de plans et de droites

Sommaire

4.1 Équation cartésienne d'un plan

4.1.1 Équation cartésienne d'un plan

Théorème 4.1. *Le plan est muni d'un repère* $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.

- *Tout plan* $\mathscr{P}$ *de l'espace admet une équation de la forme* $ax+by+cz=d$ *avec* $(a\,;\,b\,;\,c)\neq(0\,;\,0\,;\,0)$
- *Si* $(a\,;\,b\,;\,c)\neq(0\,;\,0\,;\,0)$ *alors l'ensemble des points* M *de coordonnées* $(x\,;\,y\,;\,z)$ *vérifiant* $ax+by+cz=d$ *est un plan.*

On l'admettra.

4.1.2 Vecteur normal à un plan

Définition 4.1. $\vec{n}$ est dit *vecteur normal* au plan $\mathscr{P}$ lorsqu'il est orthogonal à deux droites sécantes incluses dans $\mathscr{P}$.

Propriété 4.2. *Soit* $\vec{n}$ *normal à un plan* $\mathscr{P}$ *et* $A\in\mathscr{P}$. *Pour tout point* $M\in\mathscr{P}$ *on a* $\overrightarrow{AM}\perp\vec{n}$.

Preuve. Étant orthogonal à deux droites du plan, il est orthogonal à toute droite du plan. ♢

Théorème 4.3. *Dans un repère orthonormal, soit* $\vec{n}$ *non nul et* $\mathscr{P}$ *un plan.*

$\overrightarrow{n}\,(a\,;\,b\,;\,c)$ *normal à* $\mathscr{P}$ $\Leftrightarrow$ $\mathscr{P}$ *admet une équation de la forme* $ax+by+cz=d$.

Preuve. Soient $A\,(\alpha\,;\,\beta\,;\,\gamma)$ un point de $\mathscr{P}$ et $M\,(x\,;\,y\,;\,z)$ un point quelconque l'espace.

$$\begin{aligned}
M\,(x\,;\,y\,;\,z)\in\mathscr{P} &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\,(x-\alpha\,;\,y-\beta\,;\,z-\gamma)\perp\vec{n}\,(a\,;\,b\,;\,c)\\
&\Leftrightarrow a(x-\alpha)+b(y-\beta)+c(z-\gamma)=0 \text{ (le repère est orthonormal)}\\
&\Leftrightarrow ax+by+cz=a\alpha+b\beta+c\gamma\\
&\Leftrightarrow ax+by+cz=d \text{ en posant } d=a\alpha+b\beta+c\gamma
\end{aligned}$$

♢

4.1.3 Propriétés des plans et équations cartésiennes

Propriété 4.4 (Parallélisme). *L'espace étant muni d'un repère orthonormal, $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont deux plans d'équations respectives $\mathscr{P} : ax+by+cz=d$ et $\mathscr{P}' : a'x+b'y+c'z=d'$.*

$$\mathscr{P} \parallel \mathscr{P}' \Leftrightarrow \vec{n}(a;b;c) \text{ et } \vec{n}'(a';b';c') \text{ colinéaires } \Leftrightarrow \text{ il existe } k \text{ tel que } a=ka', b=kb' \text{ et } c=kc'$$

Preuve.

$$\begin{aligned}\mathscr{P} \parallel \mathscr{P}' &\Leftrightarrow \overrightarrow{n}(a;b;c) \text{ et } \overrightarrow{n'}(a';b';c'), \text{ vecteurs normaux respectifs de } \mathscr{P} \text{ et } \mathscr{P}', \text{ colinéaires}\\ &\Leftrightarrow \text{il existe } k \text{ tel que } \overrightarrow{n} = k\overrightarrow{n'}\\ &\Leftrightarrow \text{il existe } k \text{ tel que } a=ka', b=kb' \text{ et } c=kc'\end{aligned}$$

♢

Remarque. Une conséquence de cette propriété est que les plans $\mathscr{P} : ax+by+cz=d$ et $\mathscr{P}' : ax+by+cz=d'$ sont parallèles ($k=1$).

Propriété 4.5 (Perpendicularité). *L'espace étant muni d'un repère orthonormal, $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont deux plans d'équations respectives $\mathscr{P} : ax+by+cz=d$ et $\mathscr{P}' : a'x+b'y+c'z=d'$.*

$$\mathscr{P} \perp \mathscr{P}' \Leftrightarrow \vec{n}(a;b;c) \text{ et } \vec{n}'(a';b';c') \text{ orthogonaux } \Leftrightarrow aa'+bb'+cc'=0$$

Preuve.

$$\begin{aligned}\mathscr{P} \perp \mathscr{P}' &\Leftrightarrow \overrightarrow{n}(a;b;c) \text{ et } \overrightarrow{n'}(a';b';c'), \text{ vecteurs normaux respectifs de } \mathscr{P} \text{ et } \mathscr{P}', \text{ orthogonaux}\\ &\Leftrightarrow aa'+bb'+cc'=0 \text{ (le repère est orthonormal)}\end{aligned}$$

♢

4.1.4 Équations particulières

Propriété 4.6 (Équations des plans de base). *Le plan étant muni d'un repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on a :*

- *le plan (xOy) admet $z=0$ comme équation cartésienne ;*
- *le plan (zOy) admet $x=0$ comme équation cartésienne ;*
- *Le plan (xOz) admet $y=0$ comme équation cartésienne.*

Preuve. $(xOy) \perp \overrightarrow{k}\,(0;0;1)$ donc (xOy) admet comme équation $0x+0y+1z=d$. $O(0;0;0) \in (xOy)$ donc $d=0$.
De même pour $(zOy) \perp \overrightarrow{\imath}\,(1;0;0)$ et $(xOz) \perp \overrightarrow{\jmath}\,(0;1;0)$. ♢

Propriété 4.7 (Plans parallèles aux plans de base). *Le plan étant muni d'un repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on a :*

- *tout plan parallèle à (xOy) admet $z=d$ comme équation cartésienne ;*
- *tout plan parallèle à (zOy) admet $x=d$ comme équation cartésienne ;*
- *tout plan parallèle à (xOz) admet $y=d$ comme équation cartésienne.*

Preuve.

$$\begin{aligned}\mathscr{P} \parallel (xOy) &\Leftrightarrow \mathscr{P} \perp \overrightarrow{k}\,(0;0;1)\\ &\Leftrightarrow \mathscr{P} \text{ admet comme équation } 0x+0y+1z=d\end{aligned}$$

De même dans les deux autres cas. ♢

Propriété 4.8 (Plans parallèles aux axes). *Le plan étant muni d'un repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on a :*

- *tout plan parallèle à (Ox) admet $by+cz=d$ avec $(b;c) \neq (0;0)$ comme équation cartésienne ;*
- *tout plan parallèle à (Oy) admet $ax+cz=d$ avec $(a;c) \neq (0;0)$ comme équation cartésienne ;*
- *tout plan parallèle à (Oz) admet $ax+by=d$ avec $(a;b) \neq (0;0)$ comme équation cartésienne.*

On l'admettra.

4.2 Système d'équations cartésiennes d'une droite

4.2.1 Un exemple

En observant l'axe (Ox) on constate que tous les points de cet axe ont pour coordonnées $(k; 0; 0)$ où k est un réel quelconque. Les points de la droite (Ox) vérifient donc le système d'équations suivant : $\left\{\begin{array}{l} y=0 \\ z=0 \end{array}\right.$

Mais ces deux équations sont celles de (xOz) et de (xOy). Or (Ox) est l'intersection de ces deux plans.

Considérons deux autres plans dont (Ox) est l'intersection, par exemple le plan $\mathscr{P}$ de vecteur normal $\vec{n}=(0; 1; 1)$ passant par O, donc d'équation $\mathscr{P} : y+z=0$ et le plan $\mathscr{P}'$ de vecteur normal $\overrightarrow{n'}=(0; -1; 1)$ passant par O donc d'équation $\mathscr{P}' : -y+z=0$. Les points de (Ox) appartiennent aux deux plans donc vérifient $\left\{\begin{array}{l} y+z=0 \\ -y+z=0 \end{array}\right.$ ce qui équivaut à $\left\{\begin{array}{l} y=-z \\ y=z \end{array}\right.$ donc $\left\{\begin{array}{l} y=0 \\ z=0 \end{array}\right.$.

De cet exemple on peut généraliser :

- une droite étant l'intersection de deux plans, les points de cette droite vérifient les équations des deux plans donc le système d'équation constitué par les deux équations de ces plans ;
- On peut trouver plusieurs plans dont une droite est l'intersection donc le système d'équation d'une droite est un des systèmes d'équations que vérifient les points de la droite.

4.2.2 Système d'équations cartésiennes d'une droite

Théorème 4.9. *Le plan étant muni d'un repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on a :*

- *toute droite de l'espace admet un système d'équation de la forme* $\left\{\begin{array}{l} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{array}\right.$ *avec* $(a; b; c) \neq (0; 0; 0) \neq (a'; b'; c')$ *et tels que il n'existe pas de réel k tel que $a=ka'$, $b=kb'$ et $c=kc'$;*
- *Si $(a; b; c) \neq (0; 0; 0) \neq (a'; b'; c')$ et qu'il n'existe pas de réel k tel que $a=ka'$, $b=kb'$ et $c=kc'$ alors l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x; y; z)$ vérifient* $\left\{\begin{array}{l} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{array}\right.$ *est une droite.*

4.2.3 Système d'équations cartésiennes des axes

Propriété 4.10. *Le plan étant muni d'un repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on a :*

- *l'axe (Ox) admet* $\left\{\begin{array}{l} y=0 \\ z=0 \end{array}\right.$ *comme système d'équations cartésiennes ;*
- *l'axe (Oy) admet* $\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ z=0 \end{array}\right.$ *comme système d'équations cartésiennes ;*
- *l'axe (Oz) admet* $\left\{\begin{array}{l} y=0 \\ x=0 \end{array}\right.$ *comme système d'équations cartésiennes.*

4.3 Exercices

4.3.1 Équations de plans

EXERCICE 4.1.
$\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ est orthonormé.
Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par $A(1;-2;7)$ et dont $\vec{u}=\left(-1;\frac{1}{2};2\right)$ est un vecteur normal.
Déterminer une équation de $\mathscr{P}$.

EXERCICE 4.2.

1. $2x+3y-4z+1=0$ est l'équation d'un plan.
   Quels points parmi $A\left(0;0;\frac{1}{4}\right)$, $B\left(0;\frac{1}{4};0\right)$, $C\left(-\frac{1}{2};0;0\right)$ et $D(1;-1;2)$ appartiennent à ce plan ?
2. Soit $A(1;1;1)$, $B(0;-1;2)$ et $C(-2;1;2)$.
   (a) Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et en déduire que A, B et C définissent un plan.
   (b) Sachant que ce plan est d'équation $ax+by+cz+d=0$ et que A, B et C appartiennent à ce plan, en déduire une équation de ce plan.

EXERCICE 4.3.
Le plan $\mathscr{P}$ a pour équation $2x+y+z=6$.

1. Déterminer les coordonnées du point A, intersection du plan $\mathscr{P}$ avec l'axe des abscisses (Ox).
2. Déterminer les coordonnées des points B et C, intersections respectives du plan $\mathscr{P}$ avec les axes (Oy) et (Oz).
3. Dans un repère de l'espace, placer les points A, B et C.
   Tracer les droites (AB), (AC) et (BC), traces du plan $\mathscr{P}$ sur les plans de coordonnées.

EXERCICE 4.4.
Déterminer une équation du plan $\mathscr{P}$ passant par : $A(3;0;0)$, $B(0;4;0)$ et $C(0;0;6)$ sous la forme $ax+by+cz=d$.
On choisira d entier afin que a,b et c soient aussi des entiers.

EXERCICE 4.5.
Soit $A(1;1;1)$, $B(0;2;3)$ et $C(1;2;0)$.

1. Justifier que les points A, B et C définissent un plan $\mathscr{P}$.
2. Soit $ax+by+cz=d$ une équation de ce plan $\mathscr{P}$.
   Déterminer des valeurs possibles pour a, b, c et d.
   En déduire une équation de $\mathscr{P}$ dont tous les coefficients sont entiers.

EXERCICE 4.6.

1. Lire les coordonnées des points A, B, C, D, E et F dans le repère de la figure 4.1 page ci-contre.
2. Déterminer les équations des plans
   (a) $\mathscr{P}_1$ parallèle à (Ox) passant par B et C ;
   (b) $\mathscr{P}_2$ parallèle à (Oy) passant par A et E ;
   (c) $\mathscr{P}_3$ parallèle à (Oz) passant par B et F.
3. Déterminer les équations des plans (ABC), (ADE), (CFB) et (FED).

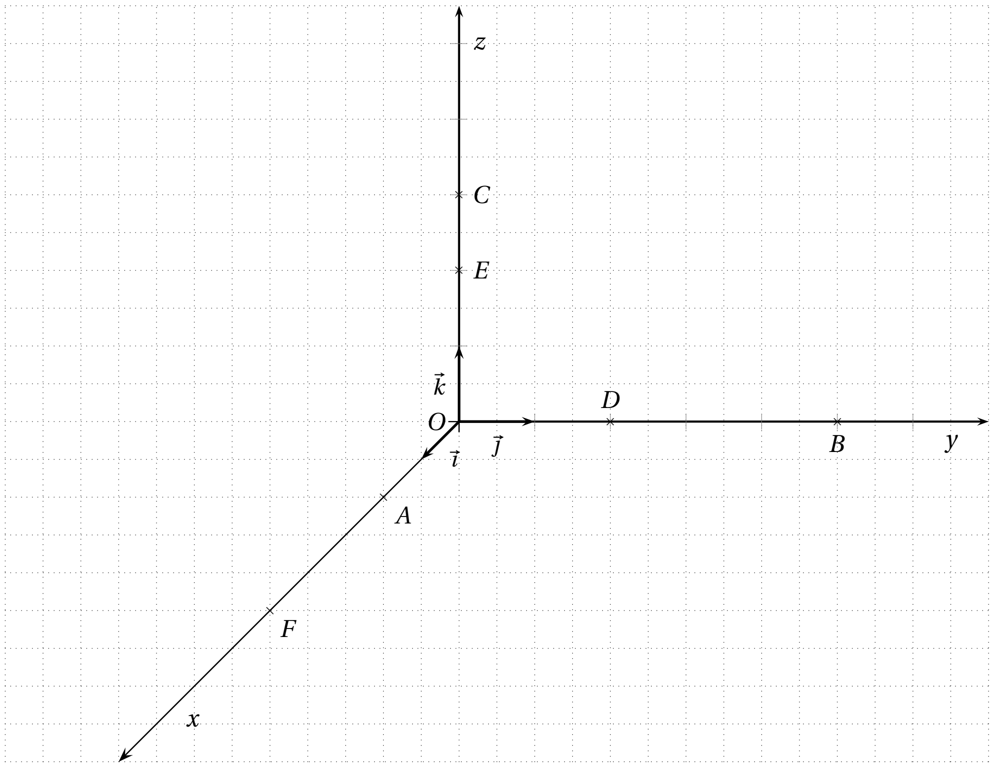
EXERCICE 4.7.
On considère les points $A(0;3;2)$, $B(0;2;4)$ et $C(3;0;2)$.

1. Montrer que ces points définissent un plan $\mathscr{P}$.
2. Justifier que la droite (AB) est la trace du plan $\mathscr{P}$ sur le plan (yOz).
3. Déterminer graphiquement les points d'intersection E et F de la droite (AB) sur les axes (Oz) et (Oy).
4. En déduire la représentation du plan $\mathscr{P}$.

EXERCICE 4.8.
L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$. L'unité est le centimètre.
On considère les points $A(-1;3;3)$, $B(0;5;5)$, $C(2;3;6)$ et $D(1;1;4)$.

1. (a) Montrer que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.
   (b) Montrer que $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$.
   (c) Montrer que $AB=AD$.
   (d) On en déduit que $ABCD$ est un carré. Calculer son aire.
2. (a) Calculer les coordonnées du point I, centre du carré $ABCD$.
   (b) Soit $J\left(\frac{9}{2};5;\frac{1}{2}\right)$. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ est normal au plan (ABC).

FIG. 4.1 – Figure de l'exercice 4.6



(c) En déduire une équation du plan (ABC).

3. Montrer que la droite (AB) coupe l'axe des abscisses en un point F que l'on déterminera.

EXERCICE 4.9.

$OPQRSTUV$ est un cube de côté 6 dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ de l'espace (voir la figure 4.2 page suivante).

1. (a) Soit $G(4\,;2\,;4)$, montrer que les points R, G et T sont alignés.
   (b) Montrer que les droites (RG) et (SG) sont perpendiculaires.
2. On désigne par I le milieu de $[TP]$ et par J le milieu de $[VR]$.
   (a) Calculer les coordonnées de I et de J.
   (b) Calculer les coordonnées du milieu M du segment $[IJ]$.
   (c) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{SM}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont orthogonaux.
   (d) Calculer l'aire du triangle SIJ.
3. (a) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{UM}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont orthogonaux.
   (b) Déterminer alors une équation du plan (SUM).

EXERCICE 4.10.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(A\,;\overrightarrow{AI}\,;\overrightarrow{AJ}\,;\overrightarrow{AK}\right)$.
Le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ est tel que $B(2\,;0\,;0)$, $D(0\,;6\,;0)$, $E(0\,;0\,;4)$.
Les points L et M sont les milieux respectifs des segments $[EF]$ et $[FB]$

1. Placer les points L et M sur la figure 4.3 page suivante.
   Donner (sans justification) les coordonnées des points A, C, F, G et H, puis vérifier par le calcul que les points L et M ont respectivement pour coordonnées $(1\,;0\,;4)$ et $(2\,;0\,;2)$.
2. Soit $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation : $y = 0$ et $\mathscr{P}_2$ le plan d'équation : $2x + z = 6$.
   (a) Montrer que $\mathscr{P}_l$ et $\mathscr{P}_2$ ne sont pas parallèles.
   (b) Soit Δ l'intersection des deux plans $\mathscr{P}_l$ et $\mathscr{P}_2$.
   Montrer que Δ est la droite (ML).
   (c) Justifier que le plan $\mathscr{P}_2$ est parallèle à l'axe $\left(A\,;\overrightarrow{AJ}\right)$.
   (d) Tracer en rouge sur la figure l'intersection de $\mathscr{P}_2$ avec le pavé $ABCDEFGH$.
   On ne demande pas de justifier cette construction.

FIG. 4.2 – Figure de l'exercice 4.9

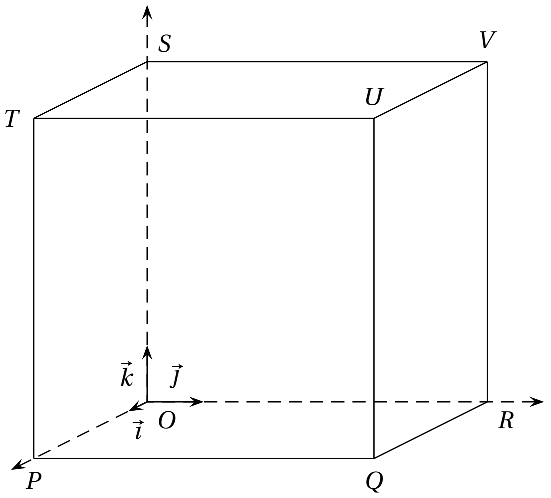
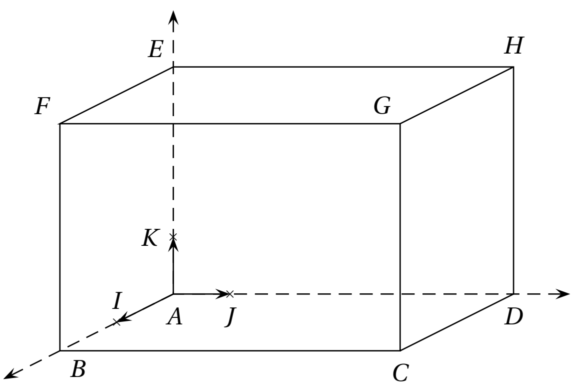


FIG. 4.3 – Figure de l'exercice 4.10



4.3.2 Équations de droites

EXERCICE 4.11.
On donne $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ deux plans d'équations respectives $2x+3y-4z+5=0$ et $-x+y-z+2=0$.

1. Montrer que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ne sont pas parallèles.
2. En déduire quel est l'ensemble des points $M \in \mathscr{P} \cap \mathscr{P}'$.

EXERCICE 4.12.
L'espace est muni d'un repère $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ orthonormé. A et B sont les deux points de coordonnées $A(0;0;2)$ et $B(0;3;2)$.

1. Montrer que A et B appartiennent au plan (yOz).
2. Montrer que A et B appartiennent à un plan parrallèle à (xOy).
3. En déduire un système d'équations cartésiennes de la droite (AB).

EXERCICE 4.13.
L'espace est muni d'un repère $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ orthonormé. $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont les deux plans d'équations respectives $2x+3y+z-4=0$ et $z=2$.

1. (a) Le système $\left\{\begin{array}{l} 2x+3y+z-4 \\ z=2 \end{array}\right.$ définit-il une droite $\mathscr{D}$?
   (b) Construire la trace de $\mathscr{P}$ et de $\mathscr{Q}$ sur les plans de coordonnées.
   (c) En déduire la représentation de $\mathscr{D}$.
2. Mêmes questions avec les systèmes suivants :
   - $\left\{\begin{array}{l} 2x-y-z-7=0 \\ x=5 \end{array}\right.$
   - $\left\{\begin{array}{l} 3x-2y+z-8=0 \\ -x+y-z-2=0 \end{array}\right.$
   - $\left\{\begin{array}{l} x+3y+2z-6=0 \\ 3x+y+z-4=0 \end{array}\right.$

EXERCICE 4.14.
L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

1. On considère les points $A(-1;2;1)$ et $B(3;-2;0)$.
   (a) Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de la droite (AB).
   (b) Soit $M(x;y;z)$ un point de la droite (AB).
   Expliquer pourquoi les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires si et seulement si $\dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y-2}{-4} = \dfrac{z-1}{-1}$.
   (c) En déduire un système d'équations cartésiennes de (AB).
2. De la même manière, déterminer un système d'équations cartésiennes de :
   - (CD) avec $C(-1;2;-3)$ et $D(0;-2;1)$.
   - (EF) avec $E(1;0;1)$ et $F(1;-2;4)$;

EXERCICE 4.15.
Dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, déterminer un système d'équations cartésiennes de la droite :

1. qui passe par $A(-3;2;0)$ et qui est perpendiculaire au plan (xOy) ;
2. qui passe par $B(5;0;-2)$ et qui est perpendiculaire au plan (xOz).

EXERCICE 4.16.
Dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, $\mathscr{D}$ est la droite dont un système d'équations cartésiennes est : $\left\{\begin{array}{l} x-y+z=0 \\ x+2y-z+3=0 \end{array}\right.$.

1. (a) Résoudre le système suivant $\left\{\begin{array}{l} x-y+z=0 \\ x+2y-z+3=0 \\ x=0 \end{array}\right.$.
   (b) Interpréter géométriquement la solution du système résolu en 1a.
2. Déterminer l'intersection de la droite $\mathscr{D}$ avec chacun des plans de coordonnées.