Devoir surveillé n°8

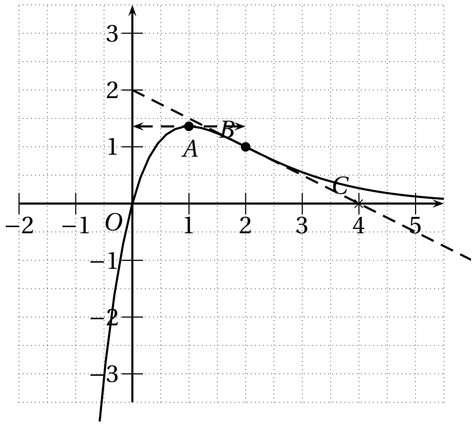
Fonction dérivée – Fonctions de deux variables

EXERCICE 8.1 (3 points)**.**
Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

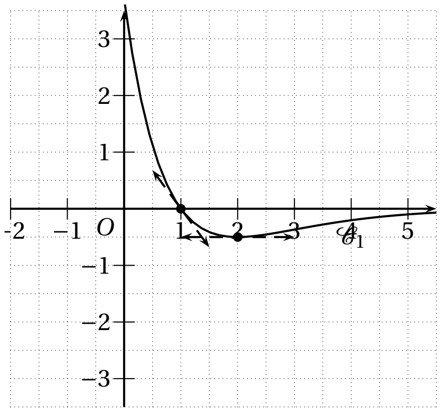
- $f(x) = (2x+3)\sqrt{x}$
- $g(x) = (x^2+4x+3)^3$

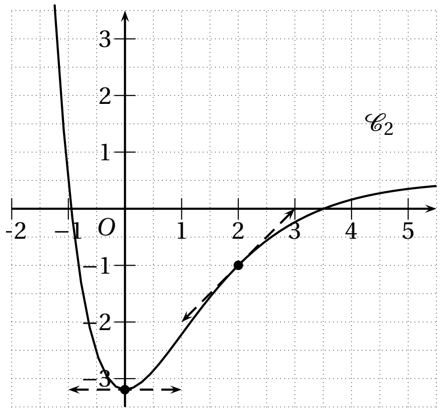
EXERCICE 8.2 (3 points)**.**
La courbe $\mathscr{C}$ de la figure ci-contre est une partie de la courbe représentative, relativement à un repère orthogonal, d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On donne les renseignements suivants :

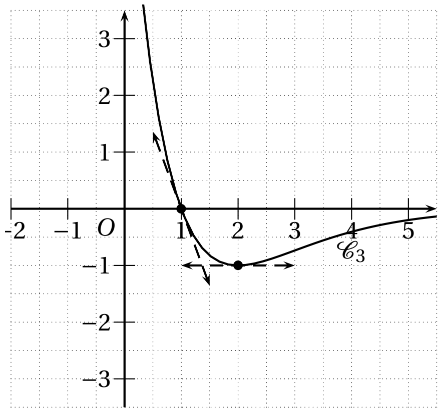
- la courbe admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1 ;
- le point $B(2; 1)$ appartient à $\mathscr{C}$;
- la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point B passe par le point $C(4; 0)$;



1. Déterminer graphiquement $f(2)$, $f'(1)$ et $f'(2)$.
2. Une des représentations graphiques ci-dessous, représente la fonction dérivée f' de f. En justifiant votre choix *à l'aide d'arguments basés sur l'examen des représentations graphiques*, déterminer la courbe associée à la fonction f'.



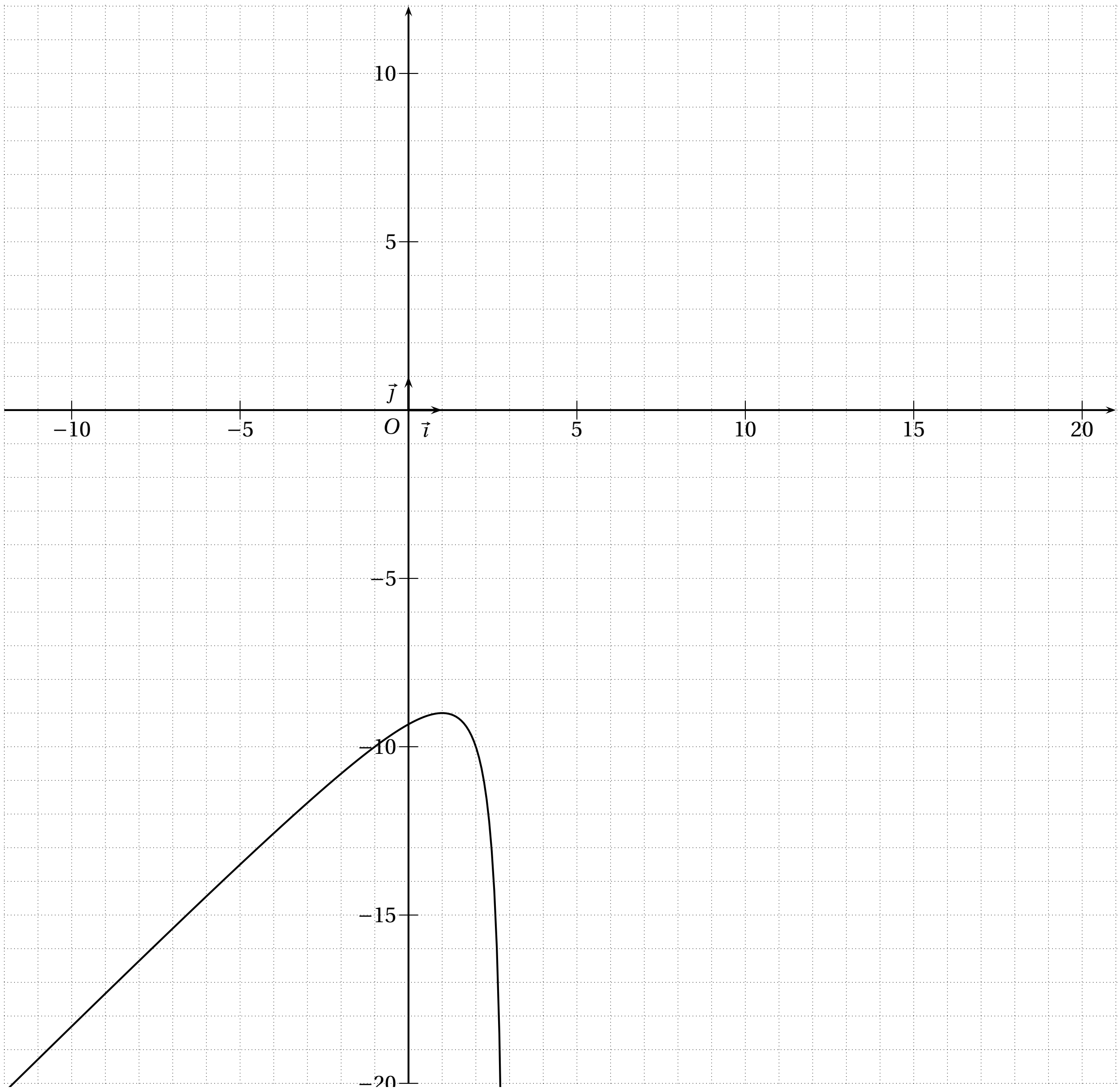




EXERCICE 8.3 (8 points)**.**
f est la fontion définie sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ par : $f(x) = \frac{x^2-11x+28}{x-3}$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.
On donne en annexe de la présente page un repère dans lequel une partie de $\mathscr{C}$ est déjà tracée.
On complètera le schéma avec les éléments rencontrés au fur et à mesure de l'exercice (points, tangentes, etc.).

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ et on note f' la fonction dérivée de f.
   (a) Justifer que $f'(x) = \frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x et établir le tableau de variation de la fonction f (on indiquera les extremums locaux de f).
2. (a) Déterminer, s'il y en a, les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
   (b) Soit T la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0. Déterminer une équation de T.
3. (a) Tracer les tangentes de la question 2.
   (b) Compléter le tracé de $\mathscr{C}$.

FIGURE 8.1 – Annexe de l'exercice 8.3



EXERCICE 8.4 (6 points)**.**
Pour les élèves ***n'ayant pas suivi*** *l'enseignement de spécialité.*
On considère un rectangle de dimensions ℓ et L. On appelle P son périmètre et S son aire.

1. Exprimer P en fonction de ℓ et L. Faire de même pour S.
2. On suppose maintenant que son périmètre est égal à 8 cm et que son aire est égale à $3,75\ \text{cm}^2$.
   Déterminer ℓ et L.
3. On suppose que son périmètre est égal à 4 cm et on recherche maintenant les dimensions du rectangle de façon que son aire S soit maximale.
   (a) Expliquer pourquoi $L = 2 - \ell$.
   (b) En déduire une expression de S en fonction de ℓ.
   (c) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(2-x)$.
   Calculer la dérivée f' et étudier son signe. Dresser le tableau des variations de f.
   (d) En déduire les dimensions du rectangle dont le périmètre P est égal à 4 cm et l'aire S est maximale.

EXERCICE 8.4 (6 points)**.**
Pour les élèves ***ayant suivi*** *l'enseignement de spécialité.*
Une entreprise fabrique des savons et des bougies parfumées en quantités respectives x et y exprimées en tonnes.
Le coût total de production z, exprimé en milliers d'euros, est donné par la relation $z = 2x^2 - 8x + y^2 - 6y + 18$ avec $x \in [0\,;6]$ et $y \in [0\,;8]$.

1. La surface $\mathscr{S}$ représentant le coût en fonction de x et y dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ est donnée sur la figure 8.2 page suivante.
   (a) Le point $A(3\,;2\,;3)$ appartient-il à la surface $\mathscr{S}$? Justifier.
   (b) Les points F et G sont sur la surface $\mathscr{S}$.
   Donner sans justifier leurs coordonnées.
   (c) Les points suivants appartiennent à $\mathscr{S}$:
   - le point B d'abscisse 5 et d'ordonnée 1 ;
   - le point C d'abscisse 4 et de cote 20 ;
   - le point D d'ordonnée 5 et de cote 30.

   Les placer sur la figure 8.2 page suivante.
   (d) Soit $y = 2$. Exprimer alors z sous la forme $z = f(x)$ puis donner la nature de la section de la surface $\mathscr{S}$ par le plan d'équation $y = 2$ en justifiant.
2. On donne, sur la figure 8.3 page suivante, la projection orthogonale de la surface $\mathscr{S}$ sur le plan $(x\mathrm{O}y)$ (« vue de dessus de la surface $\mathscr{S}$ »).
   (a) E' est la projection orthogonale dans le plan $(x\mathrm{O}y)$ d'un point E situé sur la surface $\mathscr{S}$.
      i. Déterminer les coordonnées de E.
      ii. On appelle E'' la projection orthogonale de E dans le plan $(y\mathrm{O}z)$.
      Donner les coordonnées de E''.
   (b) Représenter sur la figure 8.3 page suivante les points B', C' et D', projections orthogonales respectives de B, C et D de la question 1c dans le plan $(x\mathrm{O}y)$.

FIGURE 8.2 – Figure de l'exercice 8.4 (spécialité)

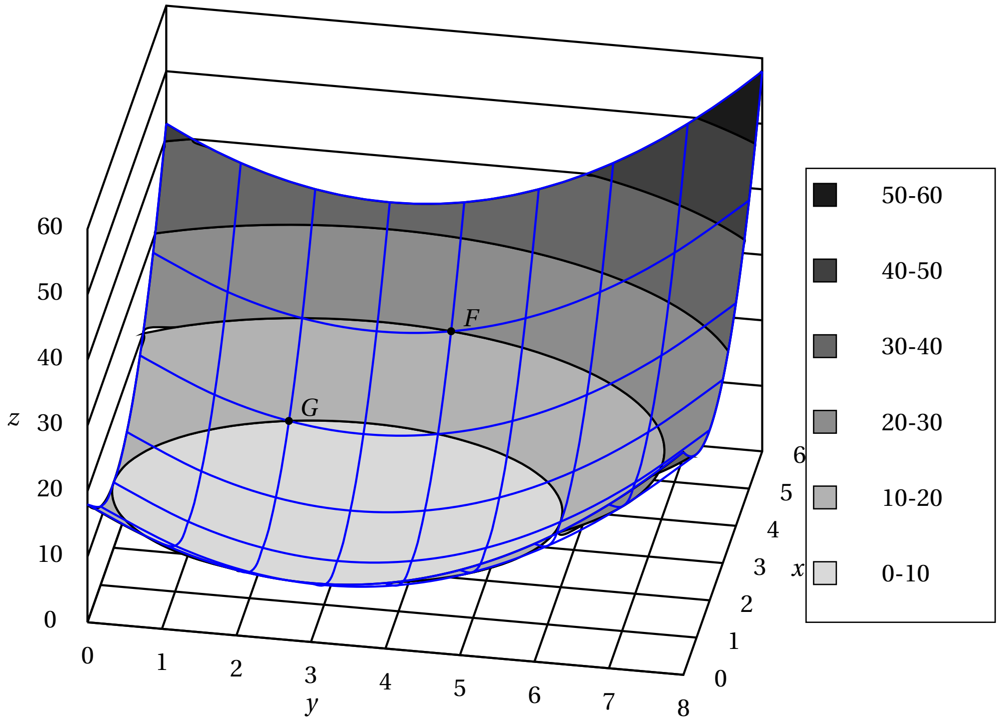


FIGURE 8.3 – Figure de l'exercice 8.4 (spécialité)